

Allora f è costante su $X \setminus \text{supp } D = X \setminus \{p, q\}$. (8)

Esercizi di Miranda:

Es. C p. 152: X cpta, D divisore di grado zero -

Mostrare che: $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$

• se $D \sim 0$ (D principale), allora
 dunque $H^0(\mathcal{O}_X(D)) = 1$.

• se $D \not\sim 0$, allora $H^0(\mathcal{O}_X(D)) = 0$.

Es. G p. 153: ~~capto~~

Mostrare che date due funzioni meromorfe f, g su X , esiste un divisore D t.c. $f, g \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$.

Es. H p. 153: X cpta, $D > 0$ t.c.

$$h^0(\mathcal{O}_X(D)) = 1 + \text{deg } D.$$

Mostrare che $\exists p \in X$ t.c. $h^0(\mathcal{O}_X(p)) = 2$.

Concludere che $X \cong \mathbb{C}P^1$.

Fibrati vettoriali:

1) Fibrati vettoriali complessi \mathbb{C}^∞ .

X varietà diff.

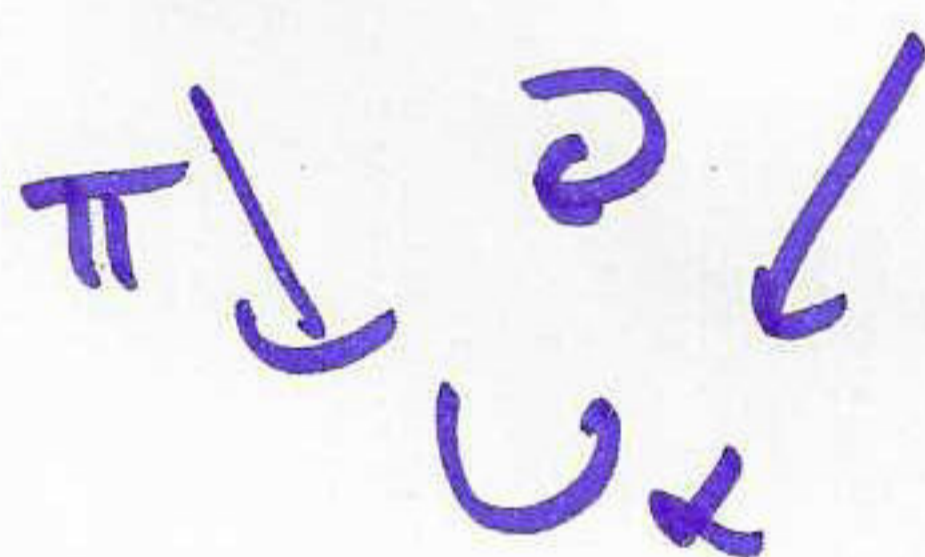
Un fibrato vettoriale complesso \mathcal{O}^∞ (9)
 E su X è

• una varietà diff. E con $\pi: E \rightarrow X$
 \mathcal{O}^∞

f.c. $\forall x \in X$

la fibre $E_x := \pi^{-1}(x)$ ha una
 struttura di spazio vett. complesso

e: $\exists \{U_\alpha\}$ ricop. aperto di X
 $\exists \phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\text{diffom.}} U_\alpha \times \mathbb{C}^n$



f.c. $\forall x \in U_\alpha$ $\phi_\alpha: E_x \rightarrow \mathbb{C}^n$

sia isom. di spazi
 vett. complessi

ma il cociclo di E è

$$\psi_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \xrightarrow{\text{cociclo}} GL(n, \mathbb{C})$$

Nota: se E è un fibrato vett. reale su
 X di rango n , con cociclo

$$\psi_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

possiamo vedere le $\psi_{\alpha\beta}$ anche e allora
 in $GL(n, \mathbb{C})$ e usare per costruire
 un fibrato vett. complesso di rango n

$$E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

2) Fibrati vettoriali complessi.

X varietà complessa
 un fibrato vettoriale complesso su X è
 una varietà complessa E
 con $\pi: E \rightarrow X$ omomorfismo

t.c. $\forall x \in X$ la fibra

$E_x := \pi^{-1}(x)$ ha una struttura
 di spazio vet. complesso

ed esistono:

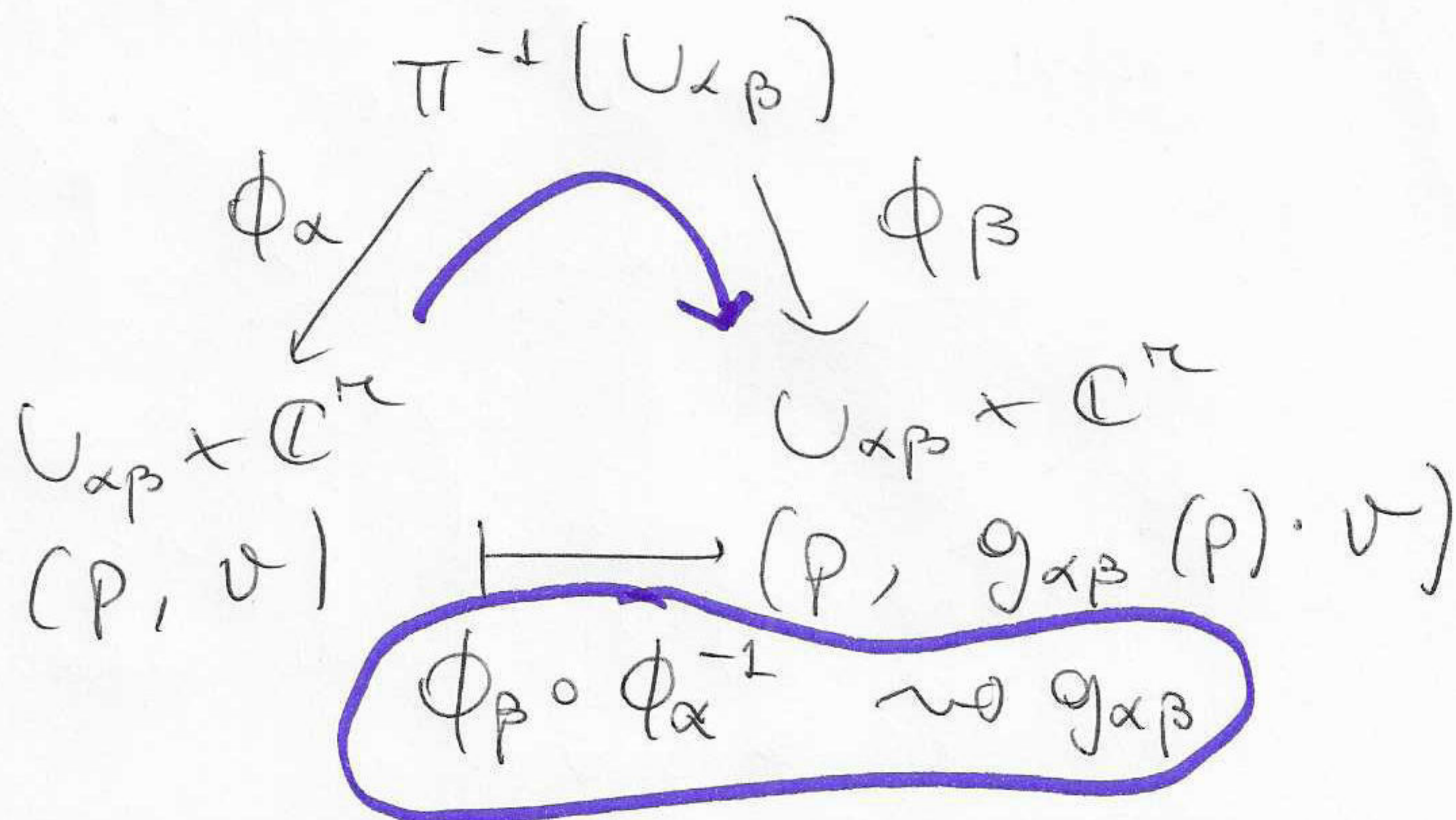
• un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di X

• $\phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\text{biolom.}}$ $U_\alpha \times \mathbb{C}^n$



t.c. $\forall x \in U_\alpha$ $\phi_\alpha: E_x \rightarrow \mathbb{C}^n$
 è isom. di \mathbb{C} -spazi
 vettoriali.

Coacolo di E : su $U_{\alpha\beta}$



$$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(n, \mathbb{C}) \text{ omege } (11)$$

Soddisfanno:

$$g_{\alpha\alpha} \equiv I$$

$$g_{\beta\alpha} = g_{\alpha\beta}^{-1}$$

$$g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma}$$



• Vicinese: dato $\{U_{\alpha\gamma}\}$ e dato $\{g_{\alpha\beta}\}$ come sopra, esiste sempre un fibrato vettoriale omege E su X , di rank n , che ha cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$.

• Due cocchi $\{g_{\alpha\beta}\}$, $\{\tilde{g}_{\alpha\beta}\}$ relativi allo stesso rappresento $\{U_{\alpha\gamma}\}$ definiti su fibrati vet. isomorfi

$$\iff \exists h_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow GL(n, \mathbb{C}) \text{ omege t.c. su } U_{\alpha\beta} \text{ e' allora}$$

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = h_{\alpha}^{-1} g_{\alpha\beta} h_{\beta}$$

• In particolare: il cocchio $\{g_{\alpha\beta}\}$ definisce un fibrato isomorfo al fibrato banale

$$X \times \mathbb{C}^n \iff \exists h_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow GL(n, \mathbb{C}) \text{ omege t.c. su } U_{\alpha\beta} \text{ e' allora}$$

$$g_{\alpha\beta} = h_{\alpha}^{-1} \cdot h_{\beta}$$

$$g_{\alpha\beta} = h_{\alpha}^{-1} \cdot h_{\beta}$$