Allora f è olomorfa su
$$X \setminus \operatorname{supp} D = X \setminus \{p\}.$$

Esercizi da Miranda:

Es. C p. 152: X cpta, D divisore di grado zero.
Mostrare che: ~~$H^0(\mathcal{O}_X(D))$~~

- se $D \sim 0$ (D principale), allora $\dim H^0(\mathcal{O}_X(D)) = 1$.
- se $D \not\sim 0$, allora $H^0(\mathcal{O}_X(D)) = 0$.

Es. G p. 153: ~~X cpta~~
Mostrare che date due funzioni meromorfe f, g su X, esiste un divisore D t.c. $f, g \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$.

Es. H p. 153: X cpta, $D > 0$ t.c.
$$h^0(\mathcal{O}_X(D)) = 1 + \deg D.$$
Mostrare che $\exists p \in X$ t.c. $\dim H^0(\mathcal{O}_X(p)) = 2$.
Concludere che $X \cong \mathbb{C}_\infty$.

Fibrati vettoriali:

1) Fibrati vettoriali complessi C^∞.

X varietà diff.

Un fibrato vettoriale complesso C^∞ E su X è

- una varietà diff. E con $\pi : E \to X$ C^∞

t.c. $\forall x \in X$
la fibra $E_x := \pi^{-1}(x)$ ha una struttura di spazio vett. complesso

e: $\exists \{U_\alpha\}$ ricopr. aperto di X
$\exists$ $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\text{diffeom.}} U_\alpha \times \mathbb{C}^r$

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\phi_\alpha"] \arrow[dr, "\pi"'] & \circlearrowleft & U_\alpha \times \mathbb{C}^r \arrow[dl] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

t.c. $\forall x \in U_\alpha$ $\phi_\alpha : E_x \to \mathbb{C}^r$ sia isom. di spazi vett. complessi

$\rightsquigarrow$ il cociclo di E è

$$\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \xrightarrow[C^\infty]{} GL(r, \mathbb{C})$$

<u>Nota</u>: se E è un fibrato vett. <u>reale</u> su X di rango r, con cociclo

$$\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to GL(r, \mathbb{R})$$

possiamo vedere le $\varphi_{\alpha\beta}$ anche a valori in $GL(r, \mathbb{C})$ e usarle per costruire un fibrato vett. complesso di rk r

$$E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

2) Fibrati vettoriali olomorfi.

X varietà complessa

Un fibrato vettoriale olomorfo su X è
. una varietà complessa E
con $\pi : E \to X$ olomorfa

t.c. $\forall x \in X$ la fibra
$E_x := \pi^{-1}(x)$ ha una struttura di spazio vett. complesso

ed esistono:
. un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di X
. $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\text{biolom.}} U_\alpha \times \mathbb{C}^r$

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\phi_\alpha"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & U_\alpha \times \mathbb{C}^r \arrow[dl] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

t.c. $\forall x \in U_\alpha$ $\phi_\alpha : E_x \to \mathbb{C}^r$
è isom. di $\mathbb{C}$-spazi vettoriali.

Cociclo di E: su $U_{\alpha\beta}$

$$\begin{tikzcd} & \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) \arrow[dl, "\phi_\alpha"'] \arrow[dr, "\phi_\beta"] & \\ U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^r \arrow[rr, bend left] & & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^r \end{tikzcd}$$

$$(p, v) \longmapsto (p, g_{\alpha\beta}(p) \cdot v)$$

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} \rightsquigarrow g_{\alpha\beta}$$

$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow GL(r, \mathbb{C})$ <u>olomorfe</u> (11)

Soddisfano:

$$\left.\begin{aligned} g_{\alpha\alpha} &\equiv I \\ g_{\beta\alpha} &= g_{\alpha\beta}^{-1} \\ g_{\alpha\gamma} &= g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} \end{aligned}\right] (*)$$

- Viceversa: dato $\{U_\alpha\}$ e date $\{g_{\alpha\beta}\}$ come sopra, esiste sempre un fibrato vettoriale olomorfo E su X, di rk r, che ha cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$.
- Due cocicli $\{g_{\alpha\beta}\}$, $\{\tilde{g}_{\alpha\beta}\}$ relativi allo stesso ricoprimento $\{U_\alpha\}$ definiscono fibrati vett. isomorfi

$\Longleftrightarrow$ $\exists\, h_\alpha : U_\alpha \longrightarrow GL(r, \mathbb{C})$ olomorfe t.c. su $U_{\alpha\beta}$ si abbia

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = h_\alpha^{-1}\, g_{\alpha\beta}\, h_\beta .$$

- In particolare: il cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$ definisce un fibrato isomorfo al fibrato banale $X \times \mathbb{C}^r$ $\Longleftrightarrow$ $\exists\, h_\alpha : U_\alpha \longrightarrow GL(r, \mathbb{C})$ olomorfe t.c. su $U_{\alpha\beta}$ si abbia

$$g_{\alpha\beta} = h_\alpha^{-1} \cdot h_\beta$$