

SPAZIO TANGENTE COMPLESSO

Sia X una varietà complessa di dim. n

Ricordiamo che, rispetto alla struttura differenziabile:

$$T_p X = \{ \text{derivazioni } \mathbb{R}\text{-lineari nell'algebra dei} \\ \text{funct. } \mathcal{O}_p^\infty \}$$

$\hookrightarrow \mathbb{R}$ -spazio vet. di dim. $2n$

Consideriamo ora il fascio $\mathcal{O}_X^\infty$ delle funzioni $\mathcal{O}_X^\infty$ su X a valori complessi, e i relativi punti:

$$\mathcal{O}_{X,p}^\infty \text{ spiga in } p \in X$$

Una derivazione $\mathbb{C}$ -lineare nell'algebra $\mathcal{O}_{X,p}^\infty$ è

$$v: \mathcal{O}_{X,p}^\infty \rightarrow \mathbb{C} \quad \mathbb{C}\text{-lineare}$$

$$\text{t.c. } v(fg) = v(f) \cdot g + f \cdot v(g).$$

$$(T_{\mathbb{C}} X)_p \stackrel{\text{def}}{=} \text{spazio vettoriale delle derivazioni} \\ \text{su } \mathcal{O}_{X,p}^\infty$$

Nota: se $v \in T_p X$ è una derivazione reale, v si estende a una derivazione complessa prendendo:

$$\text{se } f = a + ib \quad u, v \text{ reali}$$

$$v(f) = v(a) + i v(b)$$

(si può verificare
per esercizio che
soddisfa Leibnitz)

Questo dà una mappa

$$(T_p X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow (T_{\mathbb{C}} X)_p$$

$$v \otimes \lambda \mapsto \lambda v$$

e si può dimostrare che questa è un'iso
di $\mathbb{C}$ -spazi vettoriali

$$\dim_{\mathbb{C}} (T_p X) = 2n$$

Inoltre se $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ sono coord. locali $\mathbb{R}^n$

$\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}$ base reale di $T_p X$

$\rightarrow$ base complessa di $T_p X$. (*)

Definiamo ora:

se $U \subseteq X$ e $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, f si dice
^{aperto}
 antiholomorfe se $\bar{f}$ è holomorfe.

$$T^{1,0} X_p = \{ v \in (T_p X) \mid v \text{ è annullato mi primi delle funt. antiholomorfe} \}$$

$$\left(\begin{array}{l} T^{0,1} X_p = \{ v \in (T_p X) \mid v \text{ è annullato mi primi delle funt. holomorfe.} \\ \rightarrow \text{ sottosp. vet. complessi} \end{array} \right.$$

Vogliamo vedere che:

$$(T_p X) = T^{1,0} X_p \oplus T^{0,1} X_p$$

$\rightarrow$ entrambi di dim. n .

Usiamo le coord. locali - Teorema di Holomorphic
 una base diversa da (*)

$z_1, \dots, z_n$ coord. locali complesse in p
 $z_j = x_j + i y_j$ $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ coord. locali $\mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$$

• e' chiaro che

$$\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \quad \text{e' una base di} \\ (T_{\mathbb{C}} X)_p$$

Se consideriamo

$$z_k = x_k + i y_k \in \mathbb{C}_{\mathbb{C}, p}^{\infty}$$

si ha:

$$\frac{\partial z_k}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z_k}{\partial x_j} - i \frac{\partial z_k}{\partial y_j} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j} + i \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \right)$$

$$-i \left(\frac{\partial y_k}{\partial y_j} + i \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j} + \frac{\partial y_k}{\partial y_j} \right) = \delta_{jk}$$

e allo stesso modo:

$$\frac{\partial \bar{z}_k}{\partial z_j} = 0 \quad \forall i, j, \quad \frac{\partial z_k}{\partial \bar{z}_j} = 0 \quad \forall i, j, \quad \frac{\partial \bar{z}_k}{\partial \bar{z}_j} = \delta_{jk}$$

Es § u=1: Sia $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ di classe $\mathcal{C}^{\infty}$
 $f = u + i v$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(u_x - v_y + i (v_x + u_y) \right)$$

Vediamo quindi che:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0 \quad (\text{un'equat. complessa})$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} (u_x + v_y) \\ &+ \frac{i}{2} (v_x - u_y) \end{aligned}}$$

$\Leftrightarrow$ valgono le condizioni di Cauchy-Riemann
 (due equaz. reali)

$$\Leftrightarrow f \in \mathcal{O}_x(U)$$

$$\text{In tal cas: } \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = f'(z)$$

$\bar{h}$ -hol anche: $\forall f \in \mathcal{O}_P^\infty(U)$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

Perfatto:

f è antiholomorfa $\Leftrightarrow \bar{f}$ holomorfa

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Allo stesso modo in generale vediamo che:

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \in T^{1,0} X_P, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \in T^{0,1} X_P \quad \forall j=1, \dots, n$$

$\Rightarrow$ entrambi hanno dim. $> n$.

Inoltre $\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ non tutti nulli

$\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j}$ è non nullo in almeno una
finita coordinata $z_1, \dots, z_n$
(lemma)

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j} \notin T^{0,1} X_P$$

$$\Rightarrow L\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right) \cap T^{0,1} X_P = \{0\}$$

$$\Rightarrow \dim T^{0,1} X_P \leq n \Rightarrow \dim T^{0,1} X_P = n$$

$$\Rightarrow T^{0,1} X_P = L\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{SPAZIO TANGENTE} \\ \text{ANTIHOLOMORFO} \end{array} \right\}$$

e allo stesso modo:

$$\left. \begin{array}{l} T^{1,0} X_P \text{ ha dim. } n \\ \text{"} \\ L\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{SPAZIO TANGENTE} \\ \text{HOLOMORFO} \end{array}$$

- lo spazio tangente canonico è il "vero" spazio tangente a X in p e si identifica con lo spazio vettoriale delle C -derivazioni nel punto $O_{X,p}$.

A livello di fibrati vettoriali si ha le stesse cose:

TX fibrato vet. reale, $\mathcal{O}^\infty$, $rk\ 2n$

$(TX) \otimes \mathbb{C}$ fibrato tangente complessificato

↳ fibrato vet. complesso, $\mathcal{O}^\infty$, $rk\ 2n$
che si decompone:

$$(TX) \otimes \mathbb{C} = \underbrace{T^{1,0}}_{\substack{\text{fibrato vet.} \\ \text{complesso,} \\ rk\ n, \\ \text{canonico}}} \oplus \underbrace{T^{0,1}}_{\substack{\text{fibrato vet.} \\ \text{complesso,} \\ rk\ n, \\ \text{autoduale}}}$$

//

$\mathcal{O}_X$ fibrato tangente canonico
(le transizioni sono le Jacobiane
dei camb. di coord. canonici).

in cui $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}$

Sia $h: U \rightarrow V$ holomorfo

dato da un cambiamento di
coordinate dell'atlas complesso

$$h = u + iv$$

$$u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v): \underbrace{U}_{\cong \mathbb{R}^2} \rightarrow \underbrace{V}_{\cong \mathbb{R}^2} \quad \text{diff.}$$

camb. di coord.
reale

$$J = J_{\mathbb{R}}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & u_x \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$$

$J: U \rightarrow GL(2, \mathbb{R})$ è una transizione per
il fibrato tg reale TX

$J: U \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$ è una transizione per il
fibrato tg complesso $(TX) \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^2$

• la matrice

$$\begin{bmatrix} u_n & -v_n \\ v_n & u_n \end{bmatrix} \text{ su}$$

autovettori

$$u_n \pm i v_n = \begin{cases} h'(z) \\ \overline{h'(z)} \end{cases}$$

(e infatti la sempre $\det \geq 0$)

• gli autospazi sono costanti

$$L(1, \pm i)$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2u_n \lambda + v_n^2 + u_n^2 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= u_n \pm \sqrt{u_n^2 - v_n^2 - u_n^2} \\ &= u_n \pm i v_n \end{aligned}$$

• Se $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$, si ha:

$$M^{-1} \begin{bmatrix} u_n & -v_n \\ v_n & u_n \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} h'(z) & 0 \\ 0 & \overline{h'(z)} \end{bmatrix}$$

→ la funzione costante in M

$$\psi: X \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$$

de' un nuovo cociclo per il fibrato π di complessificati

$$\tilde{f}: U \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$$

$$\tilde{f} = \begin{bmatrix} u_n + i v_n & 0 \\ 0 & u_n - i v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'(z) & 0 \\ 0 & \overline{h'(z)} \end{bmatrix}$$

cociclo
del fibrato
di π

⇒ per vedere la decomp.

$$(TX) \otimes \mathbb{C} = T^{1,0} \oplus T^{0,1}$$

ES

$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

$T_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$

fibers of
derivative

$\therefore$ τ are fibers linear
derivative

$$U_0 : z_0 \neq 0$$

$$z = \frac{z_1}{z_0}$$

$$U_1 : z_1 \neq 0$$

$$w = \frac{z_0}{z_1} = \frac{1}{z}$$

Derivative of the embedding of
coordinate: $-\frac{1}{z^2}$

$$g_{01} = -\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^2$$

$\sim$ the factor $\frac{1}{2}$.