Spazio tangente complesso

X varietà complessa $\to n = \dim X$

$T_p X$ spazio tg reale $\nearrow$ $\mathbb{R}$-spazio vett. di dim. $2n$

$\|$

{derivazioni $\mathbb{R}$-lineari sull'algebra $\mathcal{C}^\infty_p$ dei germi delle funz. reali, $\mathcal{C}^\infty$, in p}

Consideriamo: il fascio $\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}$ delle funz. $\mathcal{C}^\infty$ a valori in $\mathbb{C}$ e la spiga $\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C},p}$

Una derivazione $\mathbb{C}$-lineare su $\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C},p}$ è

$$v : \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C},p} \to \mathbb{C} \quad \mathbb{C}\text{-lineare}$$

$$\text{t.c.} \quad v(f \cdot g) = v(f) \cdot g + f \cdot v(g).$$

$(T_{\mathbb{C}} X)_p = \{$derivazioni $\mathbb{C}$-lineari su $\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C},p}\}$

spazio vett. complesso di dim. $2n$

→ SPAZIO TANGENTE COMPLESSIFICATO

In coord. locali: $z_1, \dots, z_n$ coord. locali olomorfe su U

$\rightsquigarrow x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ coord. locali $\mathcal{C}^\infty$ su U

$\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}, \dfrac{\partial}{\partial y_n}$ base reale di $T_p X$ $\forall p \in U$

Se $f : U \to \mathbb{C}$ $\quad f = u + iv$

poniamo $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} := \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + i \dfrac{\partial v}{\partial x_1}$ ecc.

$\rightsquigarrow \dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial y_n}$ diventa una base su $\mathbb{C}$ di $(T_{\mathbb{C}} X)_p$

Si ha anche:

$$(T_{\mathbb{C}} X)_p = (T_p X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

dove se $v \in T_p X$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$(v \otimes \lambda)(f + i g) = \lambda \left(v(f) + i\, v(g) \right)$$

Ricordiamo che $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è
$\Omega \subseteq X$
antiolomorfa se $\bar{f}$ è olomorfa (per def.).

<u>Def</u>

$(T^{1,0} X)_p = \{ v \in (T_{\mathbb{C}} X)_p \mid v$ si annulla sui germi delle funzioni antiolomorfe $\}$.

sottosp. vett. complessi

$(T^{0,1} X)_p = \{ v \in (T_{\mathbb{C}} X)_p \mid v$ si annulla sui germi delle funzioni olomorfe.

Localmente se $z_1, \dots, z_n$ sono coord. locali su $U \subseteq X$:

$\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}$ base di $(T_{\mathbb{C}} X)_p$

Definiamo:

$$\frac{\partial}{\partial z_i} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - i \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \in (T_{\mathbb{C}} X$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + i \frac{\partial}{\partial y_i} \right)$$

$\forall i = 1, \dots, n.$

$\rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}$

altra base di $(T_{\mathbb{C}}X)_p$.

__OSS__ (caso $n=1$).

$$f : U \to \mathbb{C} \qquad f = u + iv$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_x + i v_x - i u_y + v_y\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_x + v_y + i\left(v_x - u_y\right)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(u_x + i v_x + i u_y - v_y\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_x - v_y + i\left(v_x + u_y\right)\right).$$

- $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \iff \left.\begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}\right\}$ cond. Cauchy Riemann

$\Updownarrow$

f olomorfa

e in tal caso $\frac{\partial f}{\partial z} = u_x + i v_x = f'(z)$

- $\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}}$ (verificare per es.!)

$\rightsquigarrow f$ è antiolom. $\iff \bar{f}$ olom. $\iff \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \equiv 0$

$\iff \frac{\partial f}{\partial z} \equiv 0$.

In generale si ha sempre: $p \in U$ (9)

f olom. $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$

f antiolom. $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial z_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$

$\rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \in (T^{1,0}X)_p,$

$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \in (T^{0,1}X)_p$

$\Rightarrow$ entrambi i sottospazi hanno dim. $\geq n$.

<u>OSS</u> $\frac{\partial z_i}{\partial z_j} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial \bar{z}_i}{\partial \bar{z}_j} = \delta_{ij}$

$$\frac{\partial z_i}{\partial \bar{z}_j} = 0 = \frac{\partial \bar{z}_i}{\partial z_j}$$

(verificare per esercizio!)

$\rightsquigarrow$ se $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ non tutti nulli

$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ è non nullo su almeno una delle funzioni coord. $z_1, \dots, z_n$ (olomorfe)

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial z_i} \notin (T^{0,1}X)_p$

$\Rightarrow \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right) \cap (T^{0,1}X)_p = \{0\}$

$\Rightarrow \dim (T^{0,1}X)_p \leq n$

$\Rightarrow \dim (T^{0,1}X)_p = n, \quad (T^{0,1}X)_p = \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\right)$

Allo stesso modo:

$$\dim (T^{1,0} X)_p = n$$

$$(T^{1,0} X)_p = \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right)$$

e $$(T_{\mathbb{C}} X)_p = \underbrace{(T^{1,0} X)_p}_{\text{spazio tangente olomorfo}} \oplus \underbrace{(T^{0,1} X)_p}_{\text{spazio tg antiolomorfo}}$$

$\mathcal{T}_{X,p}$
$\parallel$
$(T^{1,0} X)_p$ è il "vero" spazio tangente e X in p rispetto alla struttura complessa e si identifica con lo spazio vet. delle $\mathbb{C}$-derivazioni su $\mathcal{O}_{X,p}$.

Come fibrati vettoriali:

TX fibrato vet. reale $\mathcal{C}^\infty$, rk $2n$

$(TX) \otimes \mathbb{C}$ " " complesso $\mathcal{C}^\infty$ rk $2n$
(fibrato tangente complessificato)

$$(TX) \otimes \mathbb{C} = \underbrace{T^{1,0}}_{\text{fibrato vet. olomorfo}} \oplus \underbrace{T^{0,1}}_{\text{antiolom}}$$

sottofibrati complessi di rk n, $\mathcal{C}^\infty$

$T^{1,0} = \mathcal{T}_X$ è il fibrato tangente complesso e le transizioni sono le jacobiane dei cambiamenti di coord. complessi. (11)

<u>ES.</u> <u>$n=1$</u>

Sia $h : U \to V$, $U \subseteq \mathbb{C}$, $V \subseteq \mathbb{C}$ un camb. di coord. dell'atlante complesso.

$h = u + iv$

$u, v : U \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$

$(u,v) : U \to V$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $V \subseteq \mathbb{R}^2$ diffeom. $\to$ camb di coord. dell'atlante reale.

$$\to J = \mathrm{Jac}(u,v) = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}$$

$$\overset{(h \text{ olomorfa})}{=} \begin{bmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{bmatrix} \in GL(2,\mathbb{R})$$

$J : U \to GL(2,\mathbb{R})$ è una transizione per il fibrato tg reale TX.

$\leadsto$ $J : U \to GL(2,\mathbb{C})$ è una transizione per il fibrato tg complessificato $(TX) \otimes \mathbb{C}$

La matrice $\begin{bmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{bmatrix}$ ha autovalori $u_x \pm i v_x = \begin{cases} h'(z) \\ \overline{h'(z)} \end{cases}$

Gli autospazi sono costanti

$$\mathcal{L}(1, \pm i)$$

$\rightsquigarrow$ se $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$, si ha:

$$M^{-1} \cdot \begin{bmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{bmatrix} \cdot M = \begin{bmatrix} h'(z) & 0 \\ 0 & \overline{h'(z)} \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ la funzione costante in M

$$\psi : X \to GL(2, \mathbb{C})$$

dà un nuovo cociclo per il fibrato tg complessificato

$$\tilde{J} : U \longrightarrow GL(2, \mathbb{C})$$

$$\tilde{J}(z) = \begin{bmatrix} h'(z) & 0 \\ 0 & \overline{h'(z)} \end{bmatrix}$$

cociclo di $T^{0,1}$

Cociclo del Tang. olom $T^{1,0}$.

ES. $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

Φ $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$ fibrato tg olomorfo

$(z_0 : z_1)$

$U_0 = \{z_0 \neq 0\}$ coordinate: $z = \frac{z_1}{z_0}$

$U_1 = \{z_1 \neq 0\}$ coordinate: $t = \frac{z_0}{z_1}$

Cambiamento di coordinate: $t = h(z) = \frac{1}{z}$

⇝ il cociclo di $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$ su U_{01} è dato da

$$h'(z) = -\frac{1}{z^2}$$

$$g_{01} = -\frac{1}{z^2} = -\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^{+2}$$

Note: $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$ è un fibrato lineare olomorfo ⇝ tramite il cociclo, corrisponde a un elemento di $Pic(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{Z}$

⇝ $\boxed{\deg \mathcal{T}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} = +2}$

1-forme olomorfe su superfici di Riemann.

X sup. di Riemann

$\mathcal{T}_X$ fibrato tg olomorfo ⇝ fibrato lineare olom.

$\mathcal{T}_X^*$ fibrato cotangente olomorfo (fibrato lineare olom.).

- le 1-forme olomorfe su X sono le sezioni olomorfe di $\mathcal{T}_X^*$.

$$T_{\mathbb{C}} X = T^{1,0} \oplus T^{0,1}$$

$$⇝ (T_{\mathbb{C}} X)^* = (T^{1,0})^* \oplus (T^{0,1})^*$$

↳ le sezioni $\mathcal{C}^\infty$ di $(T_{\mathbb{C}} X)^*$ sono

Le 1-forme diff. C^∞, ma a coeff. complessi? (14)

in coord. locali x, y

$$\omega = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$$

$$f, g : U \to \mathbb{C} \quad C^\infty$$

(U dominio della carta locale).

dx, dy base duale di $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$

Definiamo:

$$\left.\begin{aligned} dz &:= dx + i\,dy \\ d\bar{z} &:= dx - i\,dy \end{aligned}\right\} \text{ 1-forme } C^\infty \text{ su } U$$

$dz, d\bar{z}$ base duale di $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

(verificare per esercizio)

$\rightsquigarrow$ $(T^{1,0})^*$ ~~base~~ ha per base dz

$\quad\; \|$ $(T^{0,1})^*$ " " " $d\bar{z}$

T^*_x

$\rightsquigarrow$ in U una 1-forma olomorfa si scrive come $\omega = f(z)\,dz$ con $f \in \mathcal{O}(U)$.

<u>Esercizio</u> Siano U, V aperti di $\mathbb{C}$ e $h : V_w \to U_z$ olomorfa

Sia $\omega = f(z)\,dz$ 1-forma olomorfa su U $f \in \mathcal{O}(U)$

in particolare: (15)

h è C^∞

ω è una 1-forma C^∞ complessa su U

$\rightsquigarrow$ $h^*\omega$ è una 1-forma C^∞ complessa su V

Verificare che se

$$z = h(w)$$

allora

$$\boxed{h^*\omega = f(h(w)) \cdot h'(w) \cdot dw}$$

e quindi $h^*\omega$ è una 1-forma olomorfa su V.

Notazione: $\Omega^1_X(U) = \{$1-forme olomorfe su $U\}$

Ω^1_X = fascio delle 1-forme olomorfe su X

. è un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli.

Es. Mostriamo che $\Omega^1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) = \{0\}$.

Sia ω una 1-forma olomorfa su $\mathbb{C}_\infty$

Su $\mathbb{C}$

$$\omega = f(z)\, dz \qquad f \text{ olomorfa su } \mathbb{C}$$

Nell'intorno di ∞ abbiamo

$$w = \frac{1}{z} \qquad z = \frac{1}{w}$$

$$dz = -\frac{1}{w^2}\, dw$$

$$\Rightarrow \omega = f\left(\frac{1}{w}\right) \cdot \left(-\frac{1}{w^2}\right) dw = g(w)\, dw$$

g olomorfa in $w=0$.

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{w}\right) = -w^2 g(w)$ olomorfa e nulla in $w=0$

$\Rightarrow f$ è olomorfa e nulla all'∞

$\Rightarrow f$ è costante e nulla

$\Rightarrow f \equiv 0 \Rightarrow \omega = 0$.

1-FORME MEROMORFE su X.

Sia $p \in X$, U intorno aperto di p in X

ω 1-forma olomorfa su $U \setminus \{p\}$.

$\rightsquigarrow \omega$ ha una singolarità isolata in p.

Se z è una coord. locale per X in p

$\omega = f(z)\, dz$ $\quad$ f ha una sing. isolata in $z_0 \leftrightarrow p$

Se w è un'altra coord. locale per X in p:

$\omega = g(w)\, dw$ $\quad$ g ha una sing. isolata in $w_0 \leftrightarrow p$

Se $z = \varphi(w)$ camb. coordinate:

$$\Rightarrow \boxed{g(w) = f(\varphi(w)) \cdot \varphi'(w)}$$

- φ biolomorfismo
  $\Rightarrow \varphi'$ olom. e non nulla in w_0

ma f e g hanno lo stesso (17)
tipo di singolarità isolate in
z_0 / w_0.