GEOMETRIA SUPERIORE 13/5/2022

Esercizi dal Miranda: (1)

ES. H, J p. 137

ES. D, F p. 145

ES. D p. 166

ES. C, D, E p. 111

ES. I p. 193

Mercoledì prossimo: discussione esercizi.

X varietà complessa di dim. n

$T^*_{\mathbb{C}}X$ cotang. complessificato

$$\bigwedge^k T^*_{\mathbb{C}} X = \bigoplus_{p+q=k} \left(\bigwedge^p (T^{1,0})^* \otimes \bigwedge^q (T^{0,1})^* \right)$$

$U \subseteq X$ aperto con coord. locali $z_1, \dots, z_n$

$\forall p \in U$ $\quad dz_1, \dots, dz_n$ base del cotang. dom.

$d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_n$ base del cotang. antidom.

Le forme di tipo (p,q) ($\mathcal{C}^\infty$, complesse) sono le sezioni $\mathcal{C}^\infty$ di $\square$ e si scrivono localmente come

$$\sum_{|I|=p,\ |J|=q} f_{I,J}\, dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$$

$\leadsto A^{p,q}$ fascio delle forme di $\mathbb{C}$ tipo (p,q)

$$A^k = \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q}$$

Note: $A^{p,q} = 0$ se $p > n$ o $q > n$.

<u>ES</u> Se $n=1$ abbiamo:

0-forme = funzioni, sono tutte di tipo $(0,0)$

1-forme: localm. $f(z)\,dz$ tipo $(1,0)$

$g(z)\,d\bar{z}$ tipo $(0,1)$

f, g C^∞

2-forme: sono tutte di tipo $(1,1)$

$$f(z)\,dz \wedge d\bar{z}$$

<u>OSS</u> Sia $f \in C^\infty(U)$.

si ha:

$$df = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i}_{\text{parte } (1,0)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i}_{\text{parte } (0,1)}$$

Verificare per esercizio!

Definiamo: $\partial f :=$ parte $(1,0)$ di df

$\bar{\partial} f :=$ parte $(0,1)$ di df

$\Rightarrow \partial f$ è di tipo $(1,0)$
$\bar\partial f$ " " " $(0,1)$
in coord. locali:

$$\partial f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_i$$

$$\bar\partial f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar z_i} d\bar z_i .$$

Allo stesso modo, data una
k-forma

$$\omega = \sum_{\substack{I,J \\ |I|+|J|=k}} f_{I,J}\, dt_{i_1}\wedge\cdots\wedge dt_{i_p}\wedge d\bar z_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z_{j_q}$$

si ha:

$$d\omega = \sum_{r=1}^{n} \Big(\sum_{I,J} \Big(\frac{\partial f_{I,J}}{\partial t_r} dt_r\wedge dt_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z_{j_q} + \frac{\partial f_{I,J}}{\partial \bar z_r} d\bar z_r\wedge dt_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z_{j_q} \Big)$$

Definiamo, localmente:

$$\partial\omega = \sum_{r=1}^{n}\sum_{I,J} \frac{\partial f_{I,J}}{\partial t_r} dt_r\wedge dt_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z_{j_q}$$

$$\bar\partial\omega = \sum_{r=1}^{n}\sum_{I,J} \frac{\partial f_{I,J}}{\partial \bar z_r} d\bar z_r\wedge dt_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z_{j_q} .$$

. la definizione non dipende dalle (4)
coordinate locali, infatti:

$$\omega = \sum_{p+q=k} \omega_{p,q} \qquad (\omega \text{ k-forma})$$

$$\Rightarrow d\omega = \sum_{p+q=k} d\omega_{p,q}$$

$$d\omega_{p,q} = \underbrace{\partial \omega_{p,q}}_{\text{tipo } (p+1,q)} + \underbrace{\bar{\partial} \omega_{p,q}}_{\text{tipo } (p,q+1)}$$

$\rightsquigarrow$ $\partial\omega_{p,q}$, $\bar{\partial}\omega_{p,q}$ non dipendono dalle coordinate locali

$\rightsquigarrow$ $\partial\omega = \sum_{p+q=k} \partial\omega_{p,q}$ non dipendono

$\bar{\partial}\omega = \sum_{p+p=k} \bar{\partial}\omega_{p,q}$ dalle coord locali.

$\rightsquigarrow$ abbiamo definito due operatori $\mathbb{C}$-lineari

$$\partial, \bar{\partial} : A^k_{\mathbb{C}} \to A^{k+1}_{\mathbb{C}}$$

t.c.: . $d = \partial + \bar{\partial}$

. $\partial A^{p,q} \subseteq A^{p+1,q}$

. $\bar{\partial} A^{p,q} \subseteq A^{p,q+1}$

OSS $\partial^2 = \bar\partial^2 = 0, \quad \partial\bar\partial = -\bar\partial\partial$

$\boxed{\text{DIM}}$ $d = \partial + \bar\partial \quad , \quad d^2 = 0$

$$d^2 = (\partial + \bar\partial)\circ(\partial + \bar\partial) = \partial^2 + \partial\bar\partial + \bar\partial\partial + \bar\partial^2$$

Se ω è una forma di tipo (p,q):

$$0 = d^2\omega = \underbrace{\partial^2\omega}_{\text{tipo }(p+2,q)} + \underbrace{\partial\bar\partial\omega + \bar\partial\partial\omega}_{\text{tipo }(p+1,q+1)} + \underbrace{\bar\partial^2\omega}_{\text{tipo }(p,q+2)}$$

$\Rightarrow \partial^2\omega = 0 \quad , \quad \bar\partial^2\omega = 0 \quad , \quad \partial\bar\partial\omega = -\bar\partial\partial\omega$

$\Rightarrow$ per linearità le 3 uguaglianze valgono su tutte le k-forme.

ES Se $n=1$: localmente

$$df = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}\, dz}_{\partial f} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar z}\, d\bar z}_{\bar\partial f}$$

Se $\omega = g(z)\, dz + h(z)\, d\bar z$

$$\partial\omega = \frac{\partial h}{\partial z}\, dz \wedge d\bar z$$

$$\bar\partial\omega = -\frac{\partial g}{\partial \bar z}\, dz \wedge d\bar z$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial \bar z}\right) dz \wedge d\bar z$$

$$\partial \bar\partial f = \partial \left(\frac{\partial f}{\partial \bar z} d\bar z \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar z} dz \wedge d\bar z$$

e $$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + i \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}} - i \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \Delta f$$

$$\Rightarrow \partial \bar\partial f = \frac{1}{4} (\Delta f) \cdot dz \wedge d\bar z$$

<u>FORME OLOMORFE</u>

<u>Def</u> Una k-forma olomorfa ω su X è una sezione olomorfa di $\Lambda^k \mathcal{E}_X^*$ olomorfa

cotang. olomorfo

$\rightsquigarrow$ localmente

$$\omega = \sum_I f_I \, dt_{i_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_k}$$

con f_I <u>olomorfe</u>.

- Le k-forme olomorfe sono sempre di tipo $(k, 0)$

~~Come se~~

- le k-forme olomorfe e le forme di tipo $(k, 0)$ sono sezioni dello stesso fibrato vett. $\Lambda^k(T^{1,0})^*$ ma olomorfe / C^∞. (7)

Ω^p_X fascio delle p-forme olomorfe

$\Omega^p_X \subset A^{p,0}$ $(p = 0, \dots, n)$

<u>OSS</u> Sia $f \in C^\infty(U)$. Allora

ES.

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \iff f \text{ soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\bar{\partial} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i = 0 \qquad f \text{ olomorfa}$$

come 1-forme.

$\leadsto$ per ogni aperto A di X $\forall f \in C^\infty(A)$ si ha:

f è olomorfa $\iff$ $\bar{\partial} f = 0$ come 1-forme su A

$\Rightarrow \mathcal{O}(A) = \ker(\bar{\partial} : C^\infty(A) \to A^{0,1}(A))$

Più in generale date una forma ω di $\Lambda_{p,0}(p,0)$:

localmente $\omega = \sum_I f_I \, dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_p}$

ω è olomorfa $\iff$ f_I è olomorfa $\forall i$

$\iff \dfrac{\partial f_I}{\partial \bar{t}_j} = 0 \quad \forall I, j \iff \bar{\partial}\omega = \underset{(p+1)}{0}$ come forma

$\rightsquigarrow \Omega^p = \ker(\bar{\partial} : A^{p,0} \longrightarrow A^{p,1})$.

- Se X è compatta: si può vedere che tutti gli spazi vettoriali complessi $H^q(X, \Omega^p_X)$ hanno dim. finita e

$$h^{p,q}(X) := \dim_{\mathbb{C}} H^q(X, \Omega^p_X)$$

(NUMERI DI HODGE di X).

<u>ES.</u> Se $n=1$:

$$h^{0,0}(X) = \dim \overbrace{H^0(X, \mathcal{O}_X)}^{\mathbb{C}} = 1$$

$$h^{1,0}(X) = \dim \underbrace{H^0(X, \Omega^1_X)}_{\Omega^1(X)} = g_{top}$$