

X spazio topologico

~~$\mathcal{F}$ fascio di gruppi abeliani su X~~

la coomologia di fasci è un funtore covariante, per ogni intero $q \geq 0$

$$H^q : \left\{ \begin{array}{l} \text{categoria} \\ \text{di fasci} \\ \text{di gruppi} \\ \text{abeliani su } X \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{gruppi} \\ \text{abeliani} \end{array} \right\}$$

Questi funtori hanno
una serie di
proprietà, per esempio:

$$1) H^0 = \text{sezioni globali:}$$

$$H^0(X, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$$

$\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} \longmapsto H^q(X, \mathcal{F})$$

q -esimo
gruppo di
coomologia
di X a coefficienti
nel fascio $\mathcal{F}$

$= q$ -esimo
gruppo di
coom. di $\mathcal{F}$.

$$2) \text{ Dato } \varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \text{ morfismo suriettivo,}$$

allora $H^q(X, \ker \varphi)$ "misura" il
fallimento della suriettività per

$$\varphi_X: \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X).$$

Coe:

Se $H^1(X, \ker \varphi) = 0$, allora φ_X è suriettiva.

Inoltre:

esiste una successione esatta

$$0 \rightarrow \ker \varphi_X \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\varphi_X} \mathcal{G}(X)$$

ovvero, $\xrightarrow{\quad} H^1(X, \ker \varphi_X)$

di coomologia

$$\text{Im } \varphi_X = \ker \delta$$

così data $g \in \mathcal{G}(X)$ si ha

$$\delta(g) = 0 \iff g \in \text{Im } \varphi_X.$$

3) Data una successione esatta corta di fasci

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

esiste una successione esatta lunga in coomologia:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\varphi_X} & H^0(X, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\psi_X} & H^0(X, \mathcal{H}) \\ & & \text{ovvero,} & & & & \\ & & \text{di coomologia} & & & & \\ & \rightarrow & H^1(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta_{\mathcal{F}}} & H^1(X, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\delta_{\mathcal{G}}} & H^1(X, \mathcal{H}) \\ & \rightarrow & H^2(X, \mathcal{F}) & \rightarrow & H^2(X, \mathcal{G}) & \rightarrow & H^2(X, \mathcal{H}) \\ & \rightarrow & \dots & & \dots & & \dots \end{array}$$

• $H^q(X, \mathcal{F})$ sono determinati (e misurati d'uso.) dalle loro proprietà. (8)

• Costruzione: coomologia di Čech
(va bene quando X è Hausdorff e paracompatto).

ES (idea della coom. di Čech).
Sia $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ morfismo di fasci su X .

Se $g \in \mathcal{G}(X)$

$\exists \{U_i\}$ ricoprimento aperto di X

$\exists f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ t.c. $\varphi_{U_i}(f_i) = g|_{U_i}$.

• Se $f_i|_{U_{ij}} = f_j|_{U_{ij}}$, allora incollando le f_i troviamo una sezione su g .

Costruiamo delle controimmagini di g su U_i che si incollano su U_{ij} .

Tutte e sole le controimmagini di $g|_{U_i}$ tramite φ_{U_i} sono:

$f_i + a_i$ con $a_i \in \ker \varphi_{U_i}$

Fissate la f_i , scegliamo a_i t.c.

$(f_i + a_i)|_{U_{ij}} = (f_j + a_j)|_{U_{ij}}$

coe :

$$f_{i|U_{ij}} - f_{j|U_{ij}} = a_{j|U_{ij}} - a_{i|U_{ij}} \quad (6)$$

(questa è una condizione equivalente
a $g \in \text{ker } \varphi_X$).

Costruzione delle cochaine di Čech

X spazio topologico

$\mathcal{F}$ fascio di gruppi abeliani su X

$U = \{U_i\}_{i \in I}$ ricoprimento aperto
t.c. I sia totalmente
ordinato.

Vogliamo associare a U e $\mathcal{F}$ un
gruppo di cochaine $\check{H}^q(U, \mathcal{F})$.

Notazione : se $i_0, \dots, i_n \in I$

$$U_{i_0 \dots i_n} := U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n}.$$

Def Un n -cochaine di Čech, per il
fascio $\mathcal{F}$, relative al ricoprimento U ,
è una collezione di sezioni d' $\mathcal{F}$, una
per ogni aperto $U_{i_0 \dots i_n}$ con $i_0 < \dots < i_n$.

$$\check{C}_n^{\mathcal{F}}(U, \mathcal{F}) := \prod_{i_0 < \dots < i_n} \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_n})$$

$\sigma = \{\sigma_{i_0} \dots \sigma_{i_m}\}$ m -cocatena (7)

Es. Una 0-cocatena è semplicemente
 $\{z_i\} \quad z_i \in \mathcal{Z}(U_i)$

Una 1-cocatena è $\{z_{ij}\} \quad i, j$
 $z_{ij} \in \mathcal{Z}(U_{ij})$

(contenute).

Def. Date una m -cocatena $\{\sigma_{i_0} \dots i_m\}$
 e $m+1$ indici $j_0, \dots, j_m \in I$ non
 necessariamente ordinati, poniamo:

$$\sigma_{j_0, \dots, j_m} = \begin{cases} 0 & \text{se } j_a = j_b \text{ per} \\ & \text{qualche } a, b. \\ \varepsilon(\tau) \sigma_{\tau(j_0), \dots, \tau(j_m)} & \text{se } j_0, \dots, j_m \text{ sono tutti} \\ & \text{distinti e } \tau \text{ è la} \\ & \text{permutazione che li} \\ & \text{ordina.} \end{cases}$$

Definiamo ora un operatore di cobordi
 $d: \check{\mathcal{C}}^m(U, \mathcal{Z}) \rightarrow \check{\mathcal{C}}^{m+1}(U, \mathcal{Z})$

ponendo: se $\sigma = \{\sigma_{i_0} \dots i_m\} \in \check{\mathcal{C}}^m$

$$(d\sigma)_{i_0 \dots i_{m+1}} = \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \sigma_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{m+1}} \quad \text{con } \hat{i}_j \text{ indica la cancellazione di } i_j$$

Note:

$$\sigma_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{m+1}}$$

$$\in \mathcal{H}(\underbrace{U_{i_0} \wedge \dots \wedge \hat{U}_{i_j} \wedge \dots \wedge U_{i_{m+1}}})$$

contains $U_{i_0 \dots i_{m+1}}$

$$\Rightarrow \sigma_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{m+1}} \in \mathcal{H}(U_{i_0 \dots i_{m+1}})$$

$$\Rightarrow (d\sigma)_{i_0 \dots i_{m+1}} \in \mathcal{H}(U_{i_0 \dots i_{m+1}}).$$

Ex $\sigma = \{ \sigma_{ij} \}$ 0-cocycle

$$(d\sigma)_{ij} = \sigma_{j|U_{ij}} - \sigma_{i|U_{ij}} \in \mathcal{H}(U_{ij})$$

Ex $\sigma = \{ \sigma_{ijk} \}$ 1-cocycle

$$(d\sigma)_{ijk} = \sigma_{jk} - \sigma_{ik} + \sigma_{ij} \in \mathcal{H}(U_{ijk})$$

$$\text{OSS } \tilde{h}^{\text{ss}} d^2 = 0. \quad \tilde{\mathcal{G}}^m \xrightarrow{d} \tilde{\mathcal{G}}^{m+1} \xrightarrow{d} \tilde{\mathcal{G}}^{m+2}$$

Theorem: data $\sigma \in \tilde{\mathcal{G}}^m$

$$\{ \sigma_{i_0 \dots i_m} \}$$

$$(dd\sigma)_{i_0 \dots i_{m+2}} = \sum_{j=0}^{m+2} (-1)^j (d\sigma)_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{m+2}}$$

$$= \sum_{j=0}^{n+2} (-1)^j \left(\sum_{k=0}^j (-1)^k \partial_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots \hat{i}_j \dots i_{n+2}} \right. \\ \left. + \sum_{k=j+1}^{n+2} (-1)^{k-1} \partial_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots \hat{i}_k \dots i_{n+2}} \right) =$$

$$= \sum_{\substack{j, k=0 \\ k < j}}^{n+2} (-1)^{j+k} \partial_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots \hat{i}_j \dots i_{n+2}} - \\ \sum_{\substack{j, k=0 \\ j < k}}^{n+2} (-1)^{j+k} \partial_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots \hat{i}_k \dots i_{n+2}} = 0.$$

$\Rightarrow$ Otteniamo un complesso di cocatene:

$$0 \rightarrow \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d} \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d} \dots$$

- gli elementi in $\ker d$ si dicono cocicli
- gli elementi in $\text{Im } d$ si dicono cobocicli

$$\text{Im } d \subseteq \ker d$$

Def $\check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \frac{\ker d_n}{\text{Im } d_{n-1}}$ n -esimo gruppo di coom. di Čech di $\mathcal{F}$ relativo al ricoprimento $\mathcal{U}$

$(\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \ker d_0)$

Oss si ha sempre $H^0(U, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$. (10)

Inoltre definiamo un'omorfismo

$$\psi: \mathcal{F}(X) \longrightarrow \check{C}^0(U, \mathcal{F})$$

$$s \longmapsto \{s|_{U_i}\}$$

Mostriamo che $\text{Im } \psi = \ker d$ (cicli).

1) $\subseteq$ Dato $\xi = \{s|_{U_i}\}$, allora

$$(d\xi)_{ij} = s|_{U_{ij}} - s|_{U_{ji}} = 0.$$

$$\Rightarrow d\xi = 0.$$

2) $\supseteq$ Dato un 0-ciclo:

$$\xi = \{s_i\} \quad \text{0-cochaina}$$

$$d\xi = 0 \Rightarrow s_i|_{U_{ij}} - s_j|_{U_{ij}} = 0 \quad \forall i, j$$

$\Rightarrow$ le s_i coincidono su $s \in \mathcal{F}(X)$

$$\text{f.e. } s|_{U_i} = s_i \Rightarrow \xi \in \text{Im } \psi.$$

Oss Esplicitiamo le condizioni di ciclo / cobordo per una 1-cochaina

$$\sigma = \{s_{ij}\}$$

$$(ds)_{ijk} = s_{jk} - s_{ik} + s_{ij} \text{ su } U_{ijk}^{(1)}$$

• s è un cociclo ~~de~~:

$$s_{ik}|_{U_{ijk}} = s_{ij}|_{U_{ijk}} + s_{jk}|_{U_{ijk}} \\ i < j < k.$$

• s è un cobord ~~de~~:

$$\exists \{t_i\} \quad t_i \in \mathcal{F}(U_i) \quad \text{t.c.}$$

$$s_{ij} = t_{j|U_{ij}} - t_{i|U_{ij}}.$$

ES Sia $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo di fasci nulli, e $g \in \mathcal{G}(X)$.

$\exists \{U_i\}$ ricoprimento aperto

$$\exists f_i \in \mathcal{F}(U_i) \quad \text{t.c.} \quad \varphi_{U_i}(f_i) = g|_{U_i}$$

Poniamo

$$s_{ij} := f_{i|U_{ij}} - f_{j|U_{ij}} \in \mathcal{F}(U_{ij})$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \varphi_{U_{ij}}(s_{ij}) &= \varphi_{U_{ij}}(f_{i|U_{ij}}) - \varphi_{U_{ij}}(f_{j|U_{ij}}) \\ &= g|_{U_{ij}} - g|_{U_{ij}} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow s_{ij} \in (\text{Ker } \varphi)(U_{ij})$$

$\Rightarrow \{s_{ij}\}$ è cocatena ~~relativa~~ al $\text{Ker } \varphi$ ~~relativa~~ al $\text{Ker } \varphi$ e

Osserviamo che un n -cochain, infatti (12)
 se $i < j$ che

$$\begin{aligned} d_{i+1} v_{ijk} &= f_{i+1} v_{ijk} - f_{i+1} w_{ijk} = \\ &= f_i \circ - f_i + f_i - f_k = d_{ij} + d_{jk} \\ &\quad \text{su } U_{ijk}. \end{aligned}$$

→ $\{d_{ij}\}$ definisce un elemento

$$\xi \in \check{H}^1(U, \ker \varphi)$$

(associato alla sezione $g \in \mathcal{G}(X)$).

$\xi = 0 \iff \{d_{ij}\}$ è un cobordo

$\iff \exists \{a_i\} \quad a_i \in (\ker \varphi)(U_i) = \ker \varphi_i$

+ c.c. $\quad \underbrace{a_j}_{f_i - f_j} = a_j - a_i \text{ su } U_{ij}$

$$f_i - f_j$$

cioè: $f_i + a_i = f_j + a_j$ su U_{ij} .

$\iff$ le $f_i + a_i$ si collano a una sezione di $\mathcal{F}(X)$ che dà una controimmagine di g .

Esercizio: Verificare che data una
 n -cochaine $\{d_{i_0 \dots i_n}\}$,
 per ogni scelta di nodi $j_0, \dots, j_{n+1}$

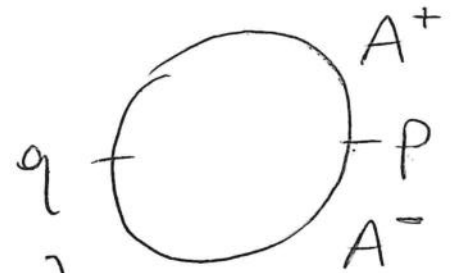
(non necessariamente ordinati / dismuti) ⑬

si ha:

$$(d\sigma)_{j_0 \dots j_{m+1}} = \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \sigma_{j_0 \dots \hat{j}_k \dots j_{m+1}}$$

ESEMPIO. $X = S^1$ top. includes

$$\mathcal{F} = \underline{\mathbb{R}}$$



$$\mathcal{U} = \{U, V\}$$

$$U = S^1 \setminus \{p\} \quad V = S^1 \setminus \{q\}$$

$$\check{G}^0(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}_U \oplus \mathbb{R}_V$$

$$U \cap V = A^+ \amalg A^-$$

$\downarrow$
 $y > 0$

$\downarrow$
 $y < 0$

$$\check{G}^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}_{A^+} \oplus \mathbb{R}_{A^-}$$

$$\check{G}^n = 0 \quad \forall n \geq 2$$

$\Rightarrow$ il complesso di Čech è

$$0 \rightarrow \check{G}^0 \xrightarrow{d} \check{G}^1 \rightarrow 0$$

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{R}}) = \frac{\check{G}^1}{\text{Im } d}$$

$$\check{H}^n(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{R}}) = 0 \quad \forall n \geq 2$$

Dato $(\lambda, \mu) \in \check{\mathcal{O}}^0(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}_0 \oplus \mathbb{R}_V$

$$d(\lambda, \mu) = (\mu - \lambda, \mu - \lambda)$$

$$\mathbb{R}_{A^+} \oplus \mathbb{R}_{A^-}$$

$$\text{Ker } d \subset \mathbb{R}^2$$

$$\{(\lambda, \mu) \mid \mu = \lambda\} \cong \mathbb{R} \cong \underline{\mathbb{R}} / S^1$$

$$\text{Im } d \subset \mathbb{R}^2$$

$$\begin{matrix} \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R} \end{matrix}$$

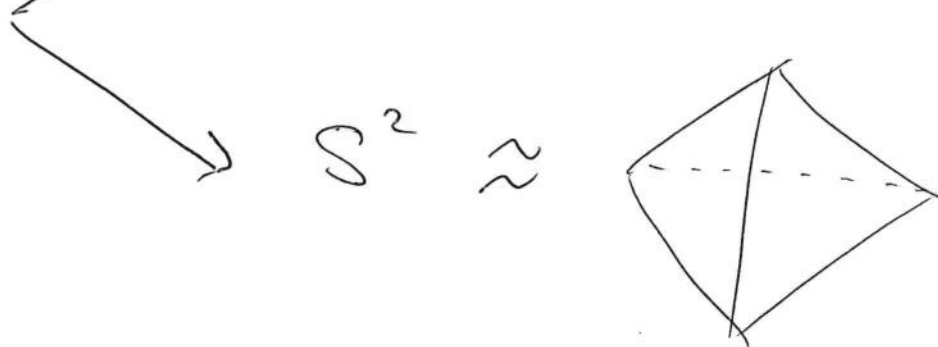
$$\Rightarrow \check{H}^1(\mathcal{U}, S^1) \cong \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO:

Calcolare $\check{H}^1(\mathcal{U})$ e il
 caso: $X = S^2$, top. euclidea
 $\mathcal{U} = \underline{\mathbb{R}}$

relativamente ai due ricoperti:

$$\{S^2, \{(1, 0, 0)\}, S^2, \{(0, 0, 1)\}\}$$



Prendiamo il
 ricoprimento
 dato da 4
 aperti che
 stanno intorno
 agli 4 vertici
 del tetraedro

OSS Se il ricoprimento U è finito (15)
 di card. $\leq N$, allora per ogni
 punto x si ha

$$\check{C}^n(U, \mathcal{F}) = 0 \quad n \geq N$$

$$\Rightarrow \check{H}^n(U, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall n \geq N$$

OSS (functoriale). Sia $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un
 morfismo di fasci. Allora φ induce
 un morfismo di complessi

$$(\check{C}^\bullet(U, \mathcal{F}), d) \longrightarrow (\check{C}^\bullet(U, \mathcal{G}), d)$$

prendendo: se $\sigma = \{ \sigma_{i_0 \dots i_n} \}$ n -cocatena
 su $\mathcal{X}$

$$\varphi(\sigma) = \{ \varphi_{U_{i_0} \dots U_{i_n}} (\sigma_{i_0 \dots i_n}) \}$$

n -cocatena su $\mathcal{Y}$

Esercizio: verificare che questo dà
 un morfismo di complessi.

Quindi φ induce un autom. in cohom.

$$\varphi_*: \check{H}^n(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^n(U, \mathcal{G})$$

$$[\sigma] \mapsto [\varphi(\sigma)]$$

Esercizio:

(16)

- 1) Dimostrare che la costruzione è
funzionale.
- 2) Dimostrare che per $m=0$ φ_* coincide
con φ_* nell'isomorfismo
 $H_1^{\vee} \cong H_1^{\text{sing}}(\text{globale})$.