X spazio topologico, $\mathcal{F}$ fascio di gruppi abeliani

$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ ricoprimento aperto, I totalm. ord.

Complesso di Čech del fascio $\mathcal{F}$ relativo al ricoprimento $\mathcal{U}$:

$$\check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \dots < i_n} \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_n})$$

$$d : \check{C}^n \longrightarrow \check{C}^{n+1}$$

$$s = (s_{i_0 \dots i_n})$$

$$(ds)_{i_0 \dots i_{n+1}} = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \, s_{i_0 \dots \hat{i_j} \dots i_{n+1}} |_{U_{i_0 \dots}}$$

$\rightsquigarrow (\check{C}^n, d)$ complesso di cocatene

$\rightsquigarrow \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è la coomologia di questo complesso.

LIMITI DIRETTI:

- Un INSIEME DIRETTO I è un insieme parzialmente ordinato t.c. $\forall a, b \in I$ $\exists c \in I$ t.c. $c \le a$, $c \le b$.

ES. 1: L'insieme degli intorni aperti di un punto $x \in X$ fissato è un insieme diretto, rispetto $\subseteq$.

__Es. 2__ L'insieme dei ricoprimenti aperti di X (con I totalmente ordinato) rispetto alla relazione di essere un raffinamento: $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$

$\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ $\quad \mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$

(se $\forall j \in J \ \exists i \in I$ t.c. $V_j \subseteq U_i$).

Esercizio: verificare che due ricoprimenti aperti hanno sempre un raffinamento comune.

__Def__ Un SISTEMA DIRETTO di gruppi è una collezione $\{G_i\}_{i \in I}$ di gruppi dove I è un insieme diretto, e di omomorfismi $f_j^i : G_i \to G_j$

$\forall i, j$ t.c. $j \leq i$, tali che:

1) $f_i^i = \mathrm{Id}_{G_i}$,

2) se $k \leq j \leq i$ allora $f_k^i = f_k^j \circ f_j^i$

Il limite diretto del sistema diretto $\{G_i\}_{i\in I}$ è

$$\varinjlim_{i\in I} G_i = \coprod G_i \Big/ \sim$$

dove: $g_i \in G_i \sim g_j \in G_j$ se
$\exists\, k \le i,\ k \le j$ t.c.
$f_k^i(g_i) = f_k^j(g_j)$ in G_k.

- $\sim$ è una rel. di equiv.
- $\varinjlim_{i\in I} G_i$ è un gruppo
- $\forall i$ si ha un omomorfismo
$$f_i : G_i \to \varinjlim_{i\in I} G_i$$
$$g_i \mapsto [g_i]$$

<u>Es. 1</u> La collezione $\{\mathcal{F}(U)\}$ con U intorno aperto di $x \in X$ fissato e ρ_V^U restrizioni è un sistema diretto, il cui limite è la spiga $\mathcal{F}_x$ del fascio $\mathcal{F}$ in x.

Omomorfismi di raffinamento

$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$

$\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ raffinamento di $\mathcal{U}$.

Scegliamo una FUNZIONE DI RAFFINAMENTO cioè:

$$r : J \longrightarrow I$$

t.c. $\forall j \in J$ si abbia $V_j \subseteq U_{r(j)}$

Usiamo r per definire una mappa nelle cocatene di Čech:

$$\tilde{r} : \check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{C}^n(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

Data $f = (f_{i_0 \dots i_n}) \in \check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

poniamo

$$\tilde{r}(f)_{j_0 \dots j_n} := \overbrace{\underbrace{f_{r(j_0) \dots r(j_n)}}_{\in \mathcal{F}(U_{r(j_0) \dots r(j_n)})} |_{V_{j_0 \dots j_n}}}^{\in \mathcal{F}(V_{j_0 \dots j_n})}$$

$$U_{r(j_0) \dots r(j_n)} \supseteq V_{j_0 \dots j_n}$$

Esercizio: $\tilde{r}$ è compatibile con il cobordo e quindi definisce un morfismo di complessi.

$\rightarrow \tilde{r}$ definisce un omomorfismo in coomologia:

$$H(r) : \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^n(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$
$$[f] \longmapsto [\tilde{r}(f)]$$

Esercizi :

1) Per $X = S^2$, $\mathcal{F} = \mathbb{R}$, rispetto ai due ricoprimenti aperti degli esercizi assegnati, scrivere l'omom. $H(r)$.

2) Per $n=0$, verificare che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}(X) \arrow[dl, "\wr"'] \arrow[dr, "\wr"] & \\
\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[rr, "H(r)"'] \arrow[urr, phantom, "\circlearrowleft"] & & \check{H}^0(\mathcal{V},\mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

Fatti (che non dimostriamo):

1) l'omomorfismo $H(r)$ non dipende dalla funzione di raffinamento r, ovvero se $r_2 : J \to I$ è un'altra funzione di raffinamento, si ha $\forall n \geq 0$:

$$H^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} := H(r) = H(\tilde{r}) : \check{H}^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{H}^n(\mathcal{V},\mathcal{F})$$

2) Dati $\mathcal{W} < \mathcal{V} < \mathcal{U}$, si ha:

$$H^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}} = H^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} \circ H^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}$$

$\forall n \geq 0$

$\rightsquigarrow \{\check{H}^n(\mathcal{U},\mathcal{F}), H^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}\}$ è un sistema diretto di gruppi abeliani

→ definiamo:

$$\check{H}^n(X;\mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^n(\mathcal{U},\mathcal{F}).$$

n-esimo gruppo di coom. di Čech di $\mathcal{F}$ (di X a coefficienti nel fascio $\mathcal{F}$).

- gli elementi di $\check{H}^n(X,\mathcal{F})$ sono classi $[f]$ f n-cociclo relativo a un ricoprimento $\mathcal{U}$.
- due classi $[f]$, $[g]$ sono uguali (g n-cociclo relativo a un ricoprimento $\mathcal{V}$) se $\exists\, \mathcal{W}$ raffinamento comune di $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ t.c. $f-g$ è un cobordo in $\mathcal{W}$

<u>OSS</u>:

1) $\check{H}^0(X,\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$ (il sistema diretto è "costante"!).

2) la costruzione è funtoriale: dato un morfismo di fasci $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ $\forall n, \forall \mathcal{U}$, φ induce un omomorfismo

$$\varphi_*: \check{H}^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{H}^n(\mathcal{U},\mathcal{G})$$

e anche:

$$\varphi_* : \check{H}^n(X, \mathcal{F}) \to \check{H}^n(X, \mathcal{G})$$
$$[f] \mapsto [\varphi_*(f)]$$

Proposizione: Se $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$, l'omomorfismo:

$\boxed{n=1}$

$$H^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} : \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

è iniettivo.

Corollario. L'omomorfismo

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^1(X, \mathcal{F})$$

è iniettivo, $\forall \mathcal{U}$.

(se $\{G_i\}_{i \in I}$ è un sistema diretto con f^i_j iniettive $\forall j \leq i$

allora $f_i : G_i \to \varinjlim_{i \in I} G_i$ è iniettiva $\forall i$

infatti se $g \in G_i$, $f_i(g) = [g] = 0$

$\Longleftrightarrow \exists j \leq i$ t.c. $f^i_j(g) = 0$

$\Rightarrow g = 0$.).

Successione esatta lunga in coomologia - I parte

Teorema. Sia X uno spazio topologico e:

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0$$

una successione esatta corta di fasci di gruppi abeliani.

Allora $\exists$ un omomorfismo

$$\delta : \check{H}^0(X, \mathcal{H}) \to \check{H}^1(X, \mathcal{F})$$

t.c. la seguente successione è esatta:

$$0 \to \underset{\mathcal{F}(X)}{\underset{\shortparallel}{\check{H}^0(X,\mathcal{F})}} \xrightarrow{\varphi_*} \underset{\mathcal{G}(X)}{\underset{\shortparallel}{\check{H}^0(X,\mathcal{G})}} \xrightarrow{\psi_*} \underset{\mathcal{H}(X)}{\underset{\shortparallel}{\check{H}^0(X,\mathcal{H})}}$$

$$\xrightarrow{\delta} \check{H}^1(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi_*} \check{H}^1(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\psi_*} \check{H}^1(X,\mathcal{H})$$

Dim. Abbiamo già mostrato l'esattezza in $\mathcal{F}(X)$ e in $\mathcal{G}(X)$.

Definiamo δ.

Sia $h \in \mathcal{H}(X)$.

ψ suriettivo $\Rightarrow$ $\exists\ \mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ ricoprimento aperto di X

$\exists\ g_i \in \mathcal{G}(U_i)$ t.c.

$$h_{|U_i} \overset{(*)}{=} \psi_{U_i}(g_i).$$

$\tilde{g}^0 = \{g_i\}$ è una 0-cocatena per $\mathcal{G}$ relativa a $\mathcal{U}$.

Consideriamo $dg \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$

$$(dg)_{ij} = g_j - g_i \in \mathcal{G}(U_{ij})$$

$$\psi_{U_{ij}}(g_j - g_i) \overset{\circledast}{=} h_{|U_{ij}} - h_{|U_{ij}} = 0$$

ma: $\operatorname{Ker} \psi_{U_{ij}} = \operatorname{Im} \varphi_{U_{ij}}$

$\Rightarrow \exists f_{ij} \in \mathcal{F}(U_{ij})$ t.c.

$$\varphi_{U_{ij}}(f_{ij}) \overset{\circledast}{=} g_j - g_i$$

(f_{ij} è unica perché $\varphi_{U_{ij}}$ è iniettiva)

$\rightsquigarrow f = \{f_{ij}\} \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

- f è un cociclo:

$$(df)_{ijk} = f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} \text{ su } U_{ijk}$$

$$\varphi_{U_{ijk}}(f_{jk} - f_{ik} + f_{ij}) \overset{\circledast}{=} g_k - g_j - (g_k - g_i) + g_j - g_i = 0$$

$\varphi_{U_{ijk}}$ iniettiva $\Rightarrow f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} = 0$ in $\mathcal{F}(U_{ijk})$

$\Rightarrow df = 0$.

$\Rightarrow f$ determina una classe in

$$[f] \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \hookrightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{F})$$

$\Rightarrow$ poniamo: $\delta(h) := [f]$

Mostriamo che $[f] \in H^1(X, \mathcal{F})$ non dipende dalle scelte di:

→ il ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_i\}$

→ le controimm. g_i

Mostriamo anzitutto che $[f]$ non dipende dalla scelta delle g_i, fissato $\mathcal{U}$.

Siano $\tilde{g}_i \in \mathcal{G}(U_i)$ t.c. $\psi_{U_i}(\tilde{g}_i) = h_{|U_i}$

$a_i := \tilde{g}_i - g_i \in \ker \psi_{U_i} = \operatorname{Im} \varphi_{U_i}$

• $\exists \tilde{f}_{ij} \in \mathcal{F}(U_{ij})$ t.c. $\varphi_{U_{ij}}(\tilde{f}_{ij}) = \tilde{g}_j - \tilde{g}_i$

$\rightsquigarrow \tilde{f} = \{\tilde{f}_{ij}\}$ cociclo

Vogliamo: $[f] = [\tilde{f}]$ in $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

cioè vogliamo $\underbrace{\tilde{f} - f}_{\{\tilde{f}_{ij} - f_{ij}\}_{ij}}$ cobordo.

$\exists b_i \in \mathcal{F}(U_i)$ t.c.

$$\varphi_{U_i}(b_i) = a_i \quad \forall i$$

$\rightsquigarrow b = \{b_i\} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

Su U_{ij}:

$$\varphi_{U_{ij}}(\tilde{f}_{ij} - f_{ij}) = \tilde{g}_j - \tilde{g}_i - (g_j - g_i) =$$

$$= \tilde{g}_j - g_j - (\tilde{g}_i - g_i) = a_j - a_i = \varphi_{U_{ij}}(b_j) - \varphi_{U_{ij}}(b_i)$$

$= \psi_{U_{ij}}(b_j - b_i)$ $\qquad (\tilde{f} - f)_{ij}$ $\qquad$ (11)

$\psi_{U_{ij}}$ iniettivo $\Rightarrow$ $\tilde{f}_{ij} - f_{ij} = b_j - b_i$ su U_{ij}

$$\underset{(db)_{ij}}{\shortparallel}$$

$$\Rightarrow \tilde{f} - f = db$$

$\Rightarrow [f] = [\tilde{f}]$ in $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e quindi in $\check{H}^1(X, \mathcal{F})$.

Mostriamo ora che la classe $[f]$ non dipende dalla scelta del ricoprimento $\mathcal{U}$. Siccome due ricoprimenti hanno sempre un raffinamento comune, basta considerare un raffinamento $\mathcal{V} = \{V_a\}_{a \in A}$ di $\mathcal{U}$.

Scegliamo una mappa di raffinamento

$$r : A \longrightarrow I$$

$$\Rightarrow V_a \subseteq U_{r(a)} \quad \forall a \in A.$$

Abbiamo: $g_i \in \mathcal{G}(U_i)$ t.c. $\psi_{U_i}(g_i) = h_{|U_i}$

$\Rightarrow \forall a$ possiamo considerare:

$$\hat{g}_a := g_{r(a)|V_a} \in \mathcal{G}(V_a)$$

$\Rightarrow \psi_{V_a}(\hat{g}_a) = h_{|V_a}$. (abbiamo già mostrato che possiamo scegliere le costruzioni come vogliamo

Domanda: $\hat{f}_{ab} := f_{r(a)r(b)|V_{ab}} \in \mathcal{F}(V_{ab})$ (12)

$$\hat{f}_{ab} := f_{r(a)r(b)|V_{ab}} \in \mathcal{F}(V_{ab})$$
$$\qquad \| $$
$$\tilde{r}(f)_{ab}$$

$$\hat{f}_{ab} = f_{r(a)r(b)|V_{ab}} = (g_{r(b)} - g_{r(a)})_{|V_{ab}}$$
$$= (\hat{g}_b - \hat{g}_a)_{|V_{ab}}$$

$\rightsquigarrow$ otteniamo la 1-cocatena $\hat{f} = r(f)$

$\rightsquigarrow$ otteniamo la classe

$$[\hat{f}] = H^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}([f]) \in H^{\mathcal{V}1}(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

$\rightsquigarrow$ i due elementi coincidono nel limite diretto $\check{H}^1(X, \mathcal{F})$.

$$\rightsquigarrow \delta : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{F})$$
$$h \longmapsto [f]$$
è ben definita

Verifichiamo l'esattezza della successione in $\mathcal{H}(X)$

$$\mathcal{G}(X) \xrightarrow{\psi_X} \mathcal{H}(X) \xrightarrow{\delta} \check{H}^1(X, \mathcal{F})$$

$\operatorname{Im} \psi_X \subseteq \operatorname{Ker} \delta$:

Supponiamo $h = \psi_X(g)$, $g \in \mathcal{G}(X)$.

Per costruire $\delta(h)$: scegliamo il ricoprimento $\{X\}$ e la controimmagine $g \in \mathcal{G}(X)$

$\rightsquigarrow$ automaticamente $f_{ij} = 0 \ \forall i, j$

$\rightsquigarrow$ $\delta(h) = 0$.

Ker $\delta \subseteq$ Im φ_X

Supponiamo $\delta(h) = 0$ in $\check{H}^1(X, \mathcal{F})$

$$[f] \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \hookrightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{F})$$

$\Rightarrow [f] = 0$ in $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

$\Rightarrow f$ è un cobordo: $\exists\, c_i \in \mathcal{F}(U_i)$

t.c. $f_{ij} = c_j - c_i \quad \forall i, j$ su U_{ij}.

Ricordiamo che:

$$\varphi_{U_{ij}}(f_{ij}) = g_j - g_i \quad \text{su } U_{ij}$$

Consideriamo:

$$\tilde{g}_i := g_i - \varphi_{U_i}(c_i) \in \mathcal{G}(U_i)$$

Su U_{ij} abbiamo:

$$\tilde{g}_j - \tilde{g}_i = g_j - \varphi_{U_{ij}}(c_j) - g_i + \varphi_{U_{ij}}(c_i)$$

$$= \varphi_{U_{ij}}(f_{ij}) - \varphi_{U_{ij}}(c_j - c_i) =$$

$$= \varphi_{U_{ij}}(f_{ij} - (c_j - c_i)) = 0$$

$\Rightarrow \exists\, g \in \mathcal{G}(X)$ t.c. $g_{|U_i} = \tilde{g}_i$

$\psi_X(g)_{|U_i} = \psi_{U_i}(g_i) =$

$= \psi_{U_i}(g_i - \varphi_{U_i}(c_i)) = h_{|U_i} \quad \forall i$

$\Rightarrow \psi_X(g) = h \quad \Rightarrow \quad h \in \operatorname{Im} \psi_X.$

Esercizio (facoltativo!)
verificare l'esattezza anche in $\check{H}^1(X, \mathcal{F})$ e in $\check{H}^1(X, \mathcal{G})$.

Teorema (successione esatta lunga in coomologia, caso generale).

Sia X uno spazio topologico di Hausdorff e paracompatto, e:

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0$$

una succ. esatta corta di fasci di gruppi abeliani su X. Allora $\forall k \geq 0$
$\exists\, \delta_k : \check{H}^k(X, \mathcal{H}) \to \check{H}^{k+1}(X, \mathcal{F})$
omom.
t.c. la seguente succ. sia esatta:

$$0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\varphi_X} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\psi_X} \mathcal{H}(X)$$

$$\xrightarrow{\delta_1} \check{H}^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi_*} \check{H}^1(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\psi_*} \check{H}^1(X, \mathcal{H})$$

$$\xrightarrow{\delta_2} \cdots\cdots$$

Ricoprimenti che calcolano la coomologia di Čech

Teorema. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff e paracompatto, $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani, e $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto.

Supp. che: $\forall n \geq 0$, $\forall i_0, \dots, i_n \in I$, $i_0 < \dots < i_n$, $\forall k > 0$

si abbia: $\check{H}^k(U_{i_0 \dots i_n}, \mathcal{F}|_{U_{i_0 \dots i_n}}) = 0$

Allora: $\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong \check{H}^k(X, \mathcal{F})$ $\forall k \geq 0$.