GEOMETRIA SUPERIORE 6/4/2022, L5

Ricoprimenti che calcolano la coom. di Čech.

Teorema Siano X uno spazio top., e $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X, $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su X.
Se $H^1(U_i, \mathcal{F}_{|U_i})=0$ $\forall i\in I$, allora
$$\check{H}^1(X,\mathcal{F})\cong\check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}).$$

$\boxed{\text{DIM}}$ Sappiamo già che la mappa
$$\check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F})\longrightarrow\check{H}^1(X,\mathcal{F})$$
è iniettiva; mostriamo la suriettività.
Sia $\xi\in\check{H}^1(X,\mathcal{F})$. Esiste un raffinamento $\mathcal{V}=\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ di $\mathcal{U}$ t.c.
$$\xi=[f],\qquad f=\{f_{\alpha\beta}\}\in\check{C}^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$$
1-cociclo,
$$f_{\alpha\beta}\in\mathcal{F}(V_{\alpha\beta}).$$
Fissiamo $i\in I$.
Allora $\mathcal{A}_i=\{U_i\cap V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è un ricoprimento aperto di U_i e
$$\check{H}^1(\mathcal{A}_i,\mathcal{F}_{|U_i})\hookrightarrow\check{H}^1(U_i,\mathcal{F}_{|U_i})=0$$
$$\Rightarrow\check{H}^1(\mathcal{A}_i,\mathcal{F}_{|U_i})=0.$$

- $\{f_{\alpha\beta}|_{U_i\cap V_{\alpha\beta}}\}$ 1-cociclo per $\mathcal{F}_{|U_i}$, relativo ad $\mathcal{A}_i$

$\Rightarrow$ è un cobordo $\Longrightarrow\exists\, g^i_\alpha\in\mathcal{F}(U_i\cap V_\alpha)$ t.c.

(**) $\boxed{f_{\alpha\beta} = g^i_\beta - g^i_\alpha \quad \text{su } U_i \cap V_{\alpha\beta}}$

(non indichiamo nelle le restrizioni, per semplicità)

Fissiamo ora $i, j \in I$ e consideriamo, per $\alpha \in A$:

$$g^i_\alpha - g^j_\alpha \in \mathcal{F}(U_{ij} \cap V_\alpha).$$

Su $U_{ij} \cap V_{\alpha\beta}$ abbiamo:

$$f_{\alpha\beta} = g^i_\beta - g^i_\alpha = g^j_\beta - g^j_\alpha$$

$$\Rightarrow \quad g^i_\alpha - g^j_\alpha = g^i_\beta - g^j_\beta \quad \text{su } U_{ij} \cap V_{\alpha\beta}$$

- $\{U_{ij} \cap V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è un ricoprimento aperto di U_{ij}, e le sezioni $g^i_\alpha - g^j_\alpha$ si incollano: $\exists\, h_{ij} \in \mathcal{F}(U_{ij})$ t.c.

(*) $\boxed{h_{ij} = g^i_\alpha - g^j_\alpha \quad \text{su } U_{ij} \cap V_\alpha}$

Consideriamo ~~Mostriamo che~~ $h = \{h_{ij}\} \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, e mostriamo che è un cociclo.

$$(dh)_{ijk} = h_{jk} - h_{ik} + h_{ij}$$

Su $U_{ijk} \cap V_\alpha$:

$$(dh)_{ijk} = g^j_\alpha - g^k_\alpha - (g^i_\alpha - g^k_\alpha) + g^i_\alpha - g^j_\alpha$$
$$= 0 \quad \forall \alpha$$

$\Rightarrow (dh)_{ijk} = 0$ su U_{ijk}

$\Rightarrow dh = 0 \quad \Rightarrow h$ è un 1-cociclo.

$\Rightarrow [h] \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. ~~Mostriamo~~ che $[h]$ è una

di

Consideriamo ora una funzione di raffinamento

$$\tau : A \to I \rightsquigarrow V_\alpha \subset U_{\tau(\alpha)} \ \forall \alpha \in A.$$

Dati $\alpha, \beta \in A$ abbiamo

$$V_\alpha \subset U_{\tau(\alpha)}, \quad V_\beta \subset U_{\tau(\beta)}$$

$$\Rightarrow V_{\alpha\beta} \subset U_{\tau(\alpha)\tau(\beta)}$$

$$\tilde{\tau} : \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{C}^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

$\{\tilde{\tau}(h)\}$ 1-cociclo relativo a $\mathcal{V}$. Vogliamo che sia coomologo a $\{f_{\alpha\beta}\}$

$$\tilde{\tau}(h)_{\alpha\beta} = h_{\tau(\alpha)\tau(\beta)} \in \mathcal{F}(V_{\alpha\beta})$$

Da $(*)$, ponendo $i = \tau(\alpha)$ e $j = \tau(\beta)$, abbiamo

$$U_{\tau(\alpha)\tau(\beta)} \cap V_{\alpha\beta} = V_{\alpha\beta}$$

e: $$h_{\tau(\alpha)\tau(\beta)} = g_\alpha^{\tau(\alpha)} - g_\alpha^{\tau(\beta)} \text{ su } V_{\alpha\beta}$$

Inoltre da $(**)$, con $i = \tau(\beta)$, abbiamo

$$U_{\tau(\beta)} \cap V_{\alpha\beta} = V_{\alpha\beta}$$

e: $$f_{\alpha\beta} = g_\beta^{\tau(\beta)} - g_\alpha^{\tau(\beta)} \text{ su } V_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow f_{\alpha\beta} - h_{\tau(\alpha)\tau(\beta)} = g_\beta^{\tau(\beta)} - g_\alpha^{\tau(\beta)} - \left(g_\alpha^{\tau(\alpha)} - g_\alpha^{\tau(\beta)}\right)$$
$$= g_\beta^{\tau(\beta)} - g_\alpha^{\tau(\alpha)} \text{ su } V_{\alpha\beta}$$

Poniamo: $s_\alpha := g_\alpha^{\tau(\alpha)} \in \mathcal{F}(V_\alpha)$ perché

$$U_{\tau(\alpha)} \cap V_\alpha = V_\alpha$$

Allora $s = \{s_\alpha\}_{\alpha \in A} \in C^0(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ e

$$\boxed{f - \tilde{\tau}(h) = ds}$$ ~~$\Rightarrow [f] = [\tilde{\tau}(h)]$ in~~

$$\Rightarrow \xi = [f] = [\tilde{r}(h)] = H(r)(\underbrace{[h]}_{\in \check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F})}) \quad \text{in } \check{H}^1(X,\mathcal{F})$$

In generale vale:

Teorema. Siano: X uno spazio topologico di Hausdorff e paracompatto, $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X, e $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su X.

Supponiamo che:
$\forall k>0$, $\forall n\geq 0$, $\forall i_0,\dots,i_n\in I$ con $i_0<\dots<i_n$

si abbia: $\check{H}^k(U_{i_0\dots i_n}, \mathcal{F}|_{U_{i_0\dots i_n}})=0$.

Allora: $\check{H}^k(\mathcal{U},\mathcal{F})\cong \check{H}^k(X,\mathcal{F}) \quad \forall k\geq 0$.

Risoluzioni.

Sia X uno spazio top. e $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su X.
Una RISOLUZIONE di $\mathcal{F}$ è una successione esatta di fasci:

$$0\to\mathcal{F}\to\mathcal{A}^0\to\mathcal{A}^1\to\cdots$$

(può essere finita o infinita).

Consideriamo la successione delle sezioni globali:

attenzione: cominciamo da A^0!

$$0 \to A^0(X) \to A^1(X) \to \dots \quad (**)$$

- Questo è un complesso di cocatene di gruppi abeliani.

<u>Def</u> Un fascio $\mathcal{A}$ su X si dice ACICLICO se:
$$H^k(X, \mathcal{A}) = 0 \quad \forall k > 0.$$

<u>Def</u> Una RISOLUZIONE ACICLICA del fascio $\mathcal{F}$ è una risoluzione di $\mathcal{F}$:
$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{A}^2 \to \dots$$
dove $\mathcal{A}^i$ è aciclico $\forall i \geq 0$.

<u>Teorema</u> (astratto di de Rham).

Sia X uno spazio topologico di Hausdorff e paracompatto. Sia
$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{A}^1 \to \mathcal{A}^2 \to \dots$$
una risoluzione <u>aciclica</u> del fascio $\mathcal{F}$, e consideriamo il complesso delle sezioni globali:
$$(*) \quad 0 \to \mathcal{A}^0(X) \xrightarrow{d^0_X} \mathcal{A}^1(X) \xrightarrow{d^1_X} \mathcal{A}^2(X) \to \dots$$

Allora $\forall k \geq 0$ $\check{H}^k(X, \mathcal{F})$ è isomorfo al k-esimo gruppo di coomologia di $(*)$.

$\boxed{\text{DIM.}}$ $\forall p \geq 0$ poniamo

$$\mathcal{Z}^p := \ker d^p \quad \text{fascio.}$$

Note:
$$\mathcal{Z}^0 = \ker d^0 \cong \mathcal{F}$$
$$\mathcal{Z}^{p+1} = \operatorname{Im} d^p \quad \forall p \geq 0$$
per l'esattezza della risoluzione

$\Rightarrow \forall p \geq 0$ abbiamo una succ. esatta corta di fasci:

$$0 \to \mathcal{Z}^p \hookrightarrow \mathcal{A}^p \xrightarrow{d^p} \mathcal{Z}^{p+1} \to 0$$

che induce in coomologia:

$$0 \to \mathcal{Z}^p(X) \hookrightarrow \mathcal{A}^p(X) \xrightarrow{d^p_X} \mathcal{Z}^{p+1}(X)$$

$$\to H^1(X, \mathcal{Z}^p) \to H^1(X, \mathcal{A}^p) = 0 \quad \text{(perché la risoluz. è aciclica)}$$

e poi, $\forall i \geq 1$:

$$0 = H^i(X, \mathcal{A}^p) \to H^i(X, \mathcal{Z}^{p+1})$$
$$\to H^{i+1}(X, \mathcal{Z}^p) \to H^{i+1}(X, \mathcal{A}^p) = 0.$$

Deduciamo:
$$H^i(X, \mathcal{Z}^{p+1}) \cong H^{i+1}(X, \mathcal{Z}^p)$$
$$\forall p \geq 0, \ \forall i \geq 1$$

e:
$$H^1(X, \mathcal{Z}^p) \cong \frac{\mathcal{Z}^{p+1}(X)}{\operatorname{Im} d^p_X} \quad \forall p \geq 0.$$

...ntanto; $\forall p \geq 0$:

$$H^p(X, \mathcal{F}) \cong H^p(X, \mathcal{Z}^0) \cong H^{p-1}(X, \mathcal{Z}^1)$$

$$\cong \ldots \cong H^1(X, \mathcal{Z}^{p-1}) \cong \frac{\mathcal{Z}^p(X)}{\operatorname{Im} d_X^{p-1}} = \underbrace{\frac{\ker d_X^p}{\operatorname{Im} d_X^{p-1}}}$$

p-esimo gruppo di coomologia del complesso (*). ∎

<u>Note</u>:

- la dimostrazione del teorema non usa la definizione di coomologia di Čech, ma le proprietà astratte della coom. di fasci (succ. esatta lunga in coomologia).

Questa è la proprietà che si usa per <u>definire</u> la coomologia di fasci su spazi topologici che non sono di Hausdorff e paracompatti, in cui la coom. di Čech non funziona (es: varietà algebriche)

e cioè:

→ si individua una opportuna classe di fasci che sappiamo dover essere aciclici

→ si mostra che ogni fascio $\mathcal{F}$ ammette una risoluzione di fasci in quella classe

→ si <u>definisce</u> la coomologia di $\mathcal{F}$ come la coomologia del complesso delle sezioni globali

→ si mostra che la definizione non dipende dalla risoluzione e che vale la succ. esatta lunga in coomologia.

COMPLESSO DI DE RHAM

Sia X una varietà differenziabile di dim. n

A^p fascio delle p-forme C^∞ su X, $p \geq 0$.

Prop I fasci A^p sono aciclici, cioè:

$$\check{H}^k(X, A^p) = 0 \quad \forall k > 0.$$

Fissiamo $k > 0$.

DIM Mostriamo che per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di X, si ha:

$$\check{H}^k(\mathcal{U}, A^p) = 0$$

Usiamo le partizioni dell'unità: sia $\{\varphi_i\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\mathcal{U}$. Significa:

1) $\varphi_i : X \to \mathbb{R}$ di classe C^∞

2) $0 \leq \varphi_i \leq 1$

3) $\operatorname{supp} \varphi_i \subseteq U_i$

4) i supporti $\{\operatorname{supp} \varphi_i\}$ sono una famiglia localmente finita, cioè ogni $x \in X$ è contenuto al più in un numero

mino di supporti

5) $\sum \varphi_i = 1$.

Sia ora $\sigma = \{\sigma_{i_0 \ldots i_k}\} \in \check{C}^k(\mathcal{U}, A^p)$ un k-cociclo ~~..~~ relativo al ricoprimento $\mathcal{U}$

$\to \sigma_{i_0 \ldots i_k}$ p-forme C^∞ su $U_{i_0 \ldots i_k}$

Vogliamo definire una $(k-1)$-cocatena τ relativa al ricoprimento $\mathcal{U}$, ~~..~~ il cui cobordo sia σ.

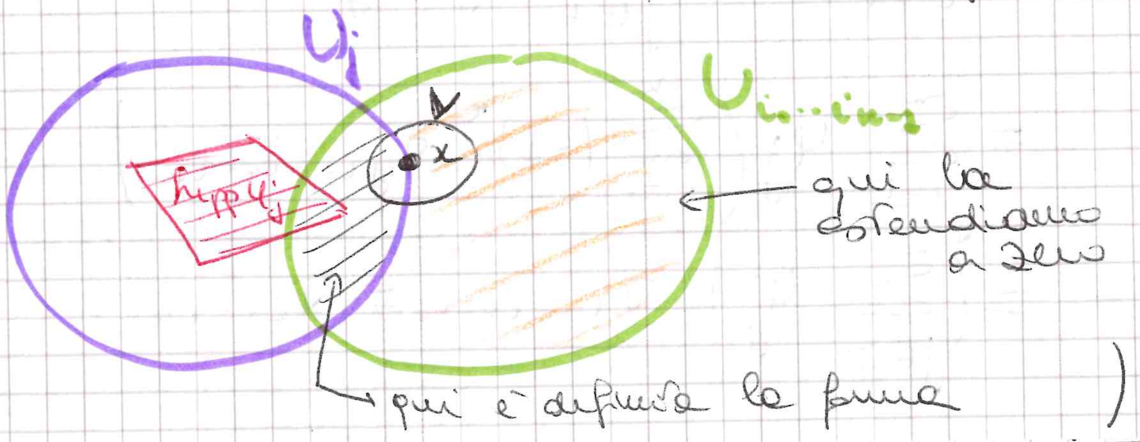
Dati $i_0, \ldots, i_{k-1}$ e j:
$(i_0 < \ldots < i_{k-1})$

$\sigma_{j i_0 \ldots i_{k-1}}$ p-forma su $U_j \cap U_{i_0 \ldots i_{k-1}}$

$\varphi_j \sigma_{j i_0 \ldots i_{k-1}}$ p-forme su $U_j \cap U_{i_0 \ldots i_{k-1}}$, con supporto contenuto in U_j

$\Rightarrow$ la possiamo estendere a zero su $U_{i_0 \ldots i_{k-1}} \setminus U_j$

($\forall x \in U_{i_0 \ldots i_{k-1}} \setminus U_j$, dato che $x \notin \operatorname{supp} \varphi_j$ e $\operatorname{supp} \varphi_j$ è chiuso, $\exists V$ intorno aperto di x in $U_{i_0 \ldots i_{k-1}}$ t.c. $V \cap \operatorname{supp} \varphi_j = \emptyset$:



)

$\rightsquigarrow \varphi_j \sigma_{j i_0 \dots i_{k-1}}$ è una p-forma su $U_{i_0 \dots i_{k-1}}$

Poniamo:

$$\tau_{i_0 \dots i_{k-1}} := \sum_{j \in I} \varphi_j \sigma_{j i_0 \dots i_{k-1}}$$

$\rightsquigarrow \{\tau_{i_0 \dots i_{k-1}}\}$ $(k-1)$-cocatena, vogliamo mostrare che σ è il suo cobordo.

p-forma su $U_{i_0 \dots i_{k-1}}$

(la somma ha senso perché è localmente finita).

Nota: per ipotesi σ è un cociclo

$\Longrightarrow d\sigma = 0$ $(k+1)$-cocatena

↳ cobordo, non differenziale!

$\Rightarrow \forall j$, su $U_j \cap U_{i_0 \dots i_k}$ si ha

$$0 = (d\sigma)_{j i_0 \dots i_k} = \sigma_{i_0 \dots i_k} + \sum_{r=0}^{k} (-1)^{r-1} \sigma_{j i_0 \dots \hat{i}_r \dots i_k}$$

$$\Rightarrow \sigma_{i_0 \dots i_k} = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \sigma_{j i_0 \dots \hat{i}_r \dots i_k} \text{ su } U_j \cap U_{i_0 \dots i_k}.$$

$$(d\tau)_{i_0 \dots i_k} = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \tau_{i_0 \dots \hat{i}_r \dots i_k} =$$

$$= \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \sum_{j \in I} \left(\varphi_j \sigma_{j i_0 \dots \hat{i}_r \dots i_k}\right) =$$

$$= \sum_{j \in I} \varphi_j \left(\sum_{r=0}^{k} (-1)^r \sigma_{j i_0 \dots \hat{i}_r \dots i_k}\right)$$

$$= \left(\sum_{j \in I} \varphi_j\right) \cdot \sigma_{i_0 \dots i_k} = \sigma_{i_0 \dots i_k}$$

OK.

Deduciamo:

Teorema di de Rham

Sia X una varietà differenziabile. $\forall p \geq 0$ si ha:

$$H^p_{dR}(X) \cong \check{H}^p(X, \underline{\mathbb{R}})$$

(come $\mathbb{R}$-spazi vettoriali).

$\boxed{\text{DIM}}$ Il complesso di de Rham, a livello di fasci:

$$0 \to \underline{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty = \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1 \to \dots \to \mathcal{A}^n \to 0$$

dà una risoluzione aciclica del fascio $\underline{\mathbb{R}}$ $\Rightarrow$ segue dal teorema astratto di de Rham.

ES. Esplicitare l'isomorfismo

$$\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{R}}) \cong H^1_{dR}(X), \text{ ovvero:}$$

1. dato una 1-forma chiusa ω su X, costruire un ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ e un 1-cociclo in $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{R}})$ che corrisponda a ω.

~~Esempio~~

ES Sia X una varietà diff. e $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un ricoprimento aperto t.c. ogni U_i è contraibile.

Allora $H^1_{dR}(X) \cong \check{H}^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{R}})$.

ESEMPIO: S^1 usato