Nota: A matrice antisimm. con det A ≠ 0 ⇒ A ha ordine pari

Se $m \equiv 2 \mod 4$: $H^{\frac{n}{2}}_{dR}(X)$ ha una forma bilin. antisimm. non degenere
$\Rightarrow b_{\frac{n}{2}}(X)$ è pari.

$\boxed{\text{Relazione con omologia / coomologia singolare}}$

Sia X una varietà topologica.

e G un gruppo abeliano
(di solito: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

Allora:
$\forall k \geq 0$ si definiscono
$H^k(X, G)$ k-esimo gruppo di coom. singolare di X a coeff. in G.

$(G = \mathbb{Z})$
coom. intera

$\underline{G}$ fascio delle funz loc. cost. a valori in G.

Allora: $H^k(X, G) \cong \check{H}^k(X, \underline{G}) \ \forall k \geq 0$

Se $G = \mathbb{R}$: allora

omologia sing. intera

$$H^k(X, \mathbb{R}) \cong \mathrm{Hom}(H_k(X), \mathbb{R})$$

Se ~~(X)~~ **OSS** Sia X una varietà (8)
topologica compatta.

Allora: $H_k(X)$ sono tutti gruppi abeliani f.g.

$$\Rightarrow H_k(X) \cong \mathbb{Z}^{b_k(X)} \oplus \begin{pmatrix} \text{gruppo} \\ \text{finito} \end{pmatrix}$$

$b_k(X)$ → rango

gruppo finito: torsione

$$\Rightarrow \mathrm{Hom}(H_k(X), \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{b_k(X)}$$

⇝ Se X è una differenziabile
$H^k(X, \mathbb{R})$ può essere vista

come:
→ coom. di de Rham
→ coom. singolare
→ coom. del fascio $\underline{\mathbb{R}}$

(prodotto wedge di forme ⟷ prodotto cup in coomologia).

Nota: la coom. singolare è invariante per equiv. omotopica
⟹ la coom. di de Rham per le varietà differenziabili è invariante per equiv. omotopica.

(per esempio: X var. diff. contraibile ⟹ ogni forma chiusa