

Def Siano: X uno sp. top.

G un gruppo abeliano

$p \in X$

$\underline{G}_p$ il fascio principale associato in

con gruppo G

Allora: $H^1(X, \underline{G}_p) = 0$.

(Dim) Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento di

X ; mostriamo che $H^1(\mathcal{U}, \underline{G}_p) = 0$.

Sia $\lambda = \{\lambda_{ij}\}$ un 1-cociclo.

$$\lambda_{ij} \in \underline{G}_p(U_{ij})$$

$\leadsto$ se $p \notin U_{ij}$, allora $\underline{G}_p(U_{ij}) = 0$,
 $\lambda_{ij} = 0$.

Se $p \in U_{ij}$, allora $\lambda_{ij} \in G = \underline{G}_p(U_{ij})$.

Condizione di cociclo: se $p \in U_{ijk}$

si ha $\lambda_{ik} = \lambda_{ij} + \lambda_{jk}$ in G .

Fixiamo un indice $i_0 \in I$ t.c. $U_{i_0} \ni p$
 e definiamo: $a_{i_0} := 0 \in G$

Se $j \neq i_0$ e $p \in U_j$, $j \neq i_0$:

$$a_j := \lambda_{i_0 j} \in G$$

Se $j \in \text{t.c.}$ $p \notin U_j$, poniamo $a_j := 0$.
 no $a = \{a_i\}$ 0-cochaina del fascio $\mathcal{G}_p$
 relativa al ricoprimento $\mathcal{U}$. (2)

Mostriamo che $da = \lambda$.

Se $j \in \text{t.c.}$ $p \in U_j$:

$$(da)_{i0j} = a_j - a_{i0} = \lambda_{i0j}$$

Se j, k sono t.c. $p \in U_{jk}$: allora $\lambda_{i0j} = \lambda_{i0k}$

$$(da)_{jk} = a_k - a_j = \lambda_{i0k} - \lambda_{i0j} = 0$$

$$= \lambda_{jk}$$

Se $p \notin U_{jk}$, allora

$$(da)_{jk} = 0 = \lambda_{jk}$$

$$\Rightarrow da = \lambda \quad \Rightarrow [\lambda] = 0 \text{ in } H^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}_p).$$

□.

X sp. Riemann cpta

$\mathcal{D}$ divisore su X , $p \in X$

Abbiamo una succ. esatta di parti
 vet. complesse:

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}(\mathcal{D}-p)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}(\mathcal{D})) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}.$$

$$\beta: H^1(X, \mathcal{O}(\mathcal{D}-p)) \xrightarrow{\gamma} H^1(X, \mathcal{O}(\mathcal{D})) \rightarrow 0$$

• $\alpha = 0$ oppure α suriettiva

(3)

II caso: $\alpha = 0$

$$\Rightarrow H^0(X, \mathcal{O}(D-P)) = H^0(X, \mathcal{O}(D))$$

• β iniettiva

$$\Rightarrow \text{Im } \beta \cong \mathbb{C} \text{ ha dimensione } 1$$

ker γ

$$\sim e: \frac{H^1(X, \mathcal{O}(D-P))}{\text{ker } \gamma} \cong H^1(X, \mathcal{O}(D))$$

Coroll. Siano: X mp. R. pte, D divisa,
 $p \in X$. Allora:

1) $H^0(X, \mathcal{O}(D-P))$ ha dim. finita

$$\Leftrightarrow H^0(X, \mathcal{O}(D)) \text{ ha dim. finita}$$

2) $H^1(X, \mathcal{O}(D-P))$ ha dim. finita

$$\Leftrightarrow H^1(X, \mathcal{O}(D)) \text{ ha dim. finita.}$$

3) Se tutti questi spazi vett. complessi hanno
dim. finita, allora:

$$h^0(\mathcal{O}_X(D)) - h^1(\mathcal{O}_X(D))$$

$$= h^0(\mathcal{O}_X(D-P)) - h^1(\mathcal{O}_X(D-P)) + 1.$$

Dim. (1) e (2) seguono dall'analisi precedente
Per (3), dalle due esatte abbiamo:

$$0 = h^0(\mathcal{O}_X(D-P)) - h^0(\mathcal{O}_X(D)) + 1 \quad (4)$$

$$- h^1(\mathcal{O}_X(D-P)) + h^1(\mathcal{O}_X(D)) \quad \underline{\underline{\text{all}}}.$$

Note: • per $D=0$ $\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{O}_X$
 e $H^0(\mathcal{O}_X) = \mathbb{C}$

Note:
 demandando
 e sottraendo può
 possiamo pensare
 de q l'ora
 a zero.

• Se $\deg D < 0$ allora $H^0(\mathcal{O}_X(D)) = \{0\}$

Prop Se X mp. Remando c'p' - Allora
 per ogni divisore D lo spazio vettoriale
 $H^0(X, \mathcal{O}(D))$ ha dim. finita. Per
 pensamente: A $D = P - N$ con $P \geq 0$
 $N \geq 0$

allora $h^0(\mathcal{O}_X(D)) \leq 1 + \deg P.$ $\text{Supp } P \cap \text{Supp } N = \emptyset$

[DM] Procediamo per induzione su $\deg P$.
 ($\deg P \geq 0$).

Se $\deg P = 0$: allora $P = 0$

$N=0$ cioè $D=0 \Rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(D)) = \mathcal{O}_X$
 $H^0(\mathcal{O}_X(D)) \cong \mathbb{C}$

e vale la disuguaglianza $\star$

$N \neq 0$ allora

$$D = -N$$

$$\Rightarrow \deg D < 0$$

$$\Rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(D)) = \{0\}. \quad \underline{\underline{\text{all}}}$$

ha che $\deg P > 0$ e na $p \in \text{Supp } P.$ $\star$

Allora

(5)

$$\begin{aligned} D - p &= P + N - p = \\ &= \underbrace{(P - p)}_{\geq 0} + N \end{aligned}$$

$$\deg(P - p) = \deg P - 1$$

$\Rightarrow$ per la d. indurre (applicata a $D - p$)

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{O}_X(D - p)) &\leq 1 + (\deg P - 1). \\ &= \deg P. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h^0(\mathcal{O}_X(D)) = \begin{cases} h^0(\mathcal{O}_X(D - p)) \\ h^0(\mathcal{O}_X(D - p)) + 1 \end{cases}$$

in ogni caso

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{O}_X(D)) &\leq h^0(\mathcal{O}_X(D - p)) + 1 \\ &\leq \deg P + 1. \end{aligned}$$

Teorema. Sia X una superficie di Riemann compatta. Allora $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ ha dimensione finita ($n \in \mathbb{C}$).

Teorema (di Riemann-Roch in forma debole).

Sia X una mp. R. cpta

e D un divisore su X . Allora

$H^1(X, \mathcal{O}(D))$ ha dimensione finita,

e si ha:

→ FORMULA DI RIEMANN-ROCH

$$h^0(\mathcal{O}_X(D)) - h^1(\mathcal{O}_X(D)) = \deg D + 1 - h^1(\mathcal{O}_X).$$

Dialethone $\left(\begin{array}{l} \text{Se } \gamma \text{ un fascio di spazi vet. su } k \\ \text{to. } H^i(X, \gamma) \text{ ha dim. finita} \\ \forall i \end{array} \right) \quad (6)$

$$\text{e } H^i(X, \gamma) = 0 \quad \forall i > n$$

n. definisce le caratteristiche d'Euler
 del fascio γ come

$$\chi(X, \gamma) := \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_k H^i(X, \gamma)$$

Dim. Sommando e sottraendo punti, in
 un numero finito di passi si arriva
 da D al divisore nullo

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \text{ ha dim. finita}$$

$$\Rightarrow H^1(X, \mathcal{O}(D)) \text{ ha dim. finita.}$$

Tenete $\forall p$ abbiamo:

$$h^0(\mathcal{O}(D)) - h^1(\mathcal{O}(D)) = h^0(\mathcal{O}(D-p)) - h^1(\mathcal{O}(D-p)) + 1.$$

Scriviamo $D = P - N$ come prima.

Sottraendo uno a uno i punti di P ,
 otteniamo:

$$h^0(\mathcal{O}(D)) - h^1(\mathcal{O}(D)) = h^0(\mathcal{O}(-N))$$

$$- h^1(\mathcal{O}(-N)) + \deg P.$$

Sommando 2 uno a uno i punti di N ,
 otteniamo:

(7)

$$h^0(\mathcal{O}_X(-N)) - h^1(\mathcal{O}_X(-N)) =$$

$$= h^0(\mathcal{O}_X) - h^1(\mathcal{O}_X) - \deg N.$$

$$\leadsto h^0(\mathcal{O}(D)) - h^1(\mathcal{O}(D)) = \underbrace{h^0(\mathcal{O}_X) - h^1(\mathcal{O}_X)}_1 + \underbrace{\deg D - \deg N}_{\deg D}$$

Coroll. 1 Se X une mp. d' R cpte -

pu qm diviseur D su X n'he:

$$h^0(\mathcal{O}_X(D)) \geq \deg D + 1 - h^1(\mathcal{O}_X).$$

Coroll. 2 Se X une mp. d' R cpte -
alors X he pointu' mercurge non
constant.

(baste prendre un diviseur D con
 $\deg D > h^1(\mathcal{O}_X)$).

Coroll. 3 Se X une mp. d' R cpte e
 $p \in X$. Alors $\exists f$ d'auerge su $X \setminus \{p\}$
e non constante.

DM. Se $D := (h^1(\mathcal{O}_X) + 1) \cdot p$.

Alors $\deg D = h^1(\mathcal{O}_X) + 1$

$$\Rightarrow h^0(\mathcal{O}_X(D)) \geq 2$$

$\Rightarrow \exists f \in H^0(\mathcal{O}_X(D))$ non constante.

Alcune f è stante su $X \setminus \text{supp } D = X \setminus \{p\}$. (8)

Esercizi di Miranda:

Es. C p. 152: X cpta, D divisors di grado zero -

Mostrare che: $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$

• se $D \sim 0$ (D principale), allora
 $\dim H^0(\mathcal{O}_X(D)) = 1$.

• se $D \not\sim 0$, allora $H^0(\mathcal{O}_X(D)) = 0$.

Es. G p. 153: ~~X cpta~~

Mostrare che date due funzioni meromorfe f, g su X , esiste un divisor D t.c. $f, g \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$.

Es. H p. 153: X cpta, $D > 0$ t.c.

$$h^0(\mathcal{O}_X(D)) = 1 + \deg D.$$

Mostrare che $\exists p \in X$ t.c. $\dim H^0(\mathcal{O}_X(p)) = 2$.

Concludere che $X \cong \mathbb{P}^1$.

Fibrati vettoriali.

1) Fibrati vettoriali complessi $\mathbb{C}^\infty$.

X varietà diff.