GEOMETRIA SUPERIORE 6/5/2022 L1

(1)

Esercizi da Miranda:

pag. 111/112: es. A, B, C, D, E

pag. 117 es. H.

OSS X sup. di Riemann

$p \in X$ U intorno aperto di p

$\omega \in \Omega^1(U \setminus \{p\})$

~~dee~~ Consideriamo due scritture locali in p:

$$\omega = f(z)\,dz = g(w)\,dw$$

vediamo che:

f è meromorfa in $z_0 \leftrightarrow p$

$\iff$ g è merom. in $w_0 \leftrightarrow p$

e in tal caso: $\mathrm{ord}_{z_0} f = \mathrm{ord}_{w_0} g$

Def. Sia $U \subseteq X$ aperto. Una 1-forma meromorfa su U è una 1-forma ω olomorfa su $U \setminus S$, dove $S \subset U$ è discreto, t.c. $\forall p \in S$ localmente si abbia $\omega = f(z)\,dz$ con f meromorfa in p.

Poniamo anche:

$$\mathrm{ord}_p \omega := \mathrm{ord}_{z_0} f \qquad z_0 \mapsto p$$

Diciamo che ω ha uno zero / un polo se lo ha f.

$$\mathcal{M}_X^{(1)}(U) = \{ 1\text{-forme meromorfe su } U \}$$

- è uno spazio vett. complesso
- è un modulo su $\mathcal{M}_X(U)$
- $\mathcal{M}_X^{(1)}$ è un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli.

<u>ES.</u> (1-forme meromorfe su $\mathbb{C}_\infty$).

Sia ω una 1-forma meromorfa su $\mathbb{C}_\infty$

Su $\mathbb{C}$:
$$\omega = f(z)\, dz$$

con f meromorfa su $\mathbb{C}$

Su ∞:
$$w = \frac{1}{z}, \quad z = \frac{1}{w}$$

$$\omega = \underbrace{f\left(\frac{1}{w}\right)\left(-\frac{1}{w^2}\right)}_{g(w)} dw \qquad g \text{ meromorfa in } w=0$$

$\Rightarrow f$ meromorfa anche in $z = \infty$

$\Rightarrow f$ è meromorfa su $\mathbb{C}_\infty$

$\Rightarrow f$ è razionale: $\quad f(z) = \prod_{i=1}^{n} (z-\lambda_i)^{e_i}$

$$\omega = \prod_{i=1}^{n} (z-\lambda_i)^{e_i}\, dz \qquad e_i \in \mathbb{Z},\ \lambda_i \in \mathbb{C}$$

$\leadsto \ ord_{\lambda_i} \omega = e_i$

$$ord_\infty \omega = ord_0 \, g(w) = ord_\infty f - 2 =$$

$$= - \sum_{i=1}^{n} e_i - 2$$

$$\Rightarrow \sum_{p \in \mathbb{C}_\infty} ord_p \, \omega = -2$$

OSS. 1 Sia X sup. di Riemann e ω una 1-forma meromorfa su X, $\omega \neq 0$. Allora l'insieme degli zeri e dei poli di ω in X è discreto.

Lemma Sia X una sup. di Riemann e ω una 1-forma meromorfa su X, $\omega \neq 0$. Allora

$\mathcal{M}_X^{(1)}(X)$ è uno spazio vettoriale di dim. 1 nel campo $\mathcal{M}(X)$.

DIM. $\mathcal{M}(X)$ è un campo e $\mathcal{M}^{(1)}(X)$ è un modulo su $\mathcal{M}(X)$
$\Rightarrow$ è uno spazio vett. su $\mathcal{M}(X)$.
Dobbiamo mostrare che ha dim. 1, cioè che $\omega \neq 0$ è una base.

Sia $\eta \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$.

localmente su un aperto U di X con coord. locale z:

$$\omega = a(z)\,dz$$

$$\eta = b(z)\,dz$$

a, b meromorfe su U, $a \neq 0$

$\Rightarrow f := \dfrac{b(z)}{a(z)}$ meromorfa su U.

Se V è un aperto di X con ~~[illegible]~~ coord locale w e $U \cap V \neq \emptyset$:

se $z = \varphi(w)$ camb. di coord.

$\Rightarrow$ in $U \cap V$ $\quad dz = \varphi'(w)\,dw$

in V

$$\omega = \alpha(w)\,dw$$

$$\eta = \beta(w)\,dw$$

$\rightsquigarrow \dfrac{\beta(w)}{\alpha(w)}$ merom. su V

$\Rightarrow$

$$\alpha(w) = a(\varphi(w)) \cdot \varphi'(w)$$

$$\beta(w) = b(\varphi(w)) \cdot \varphi'(w)$$

$\Rightarrow \dfrac{\beta}{\alpha}(w) = \dfrac{b}{a}(\varphi(w))$

$\Rightarrow \dfrac{\beta}{\alpha}$ e $\dfrac{b}{a}$ si incollano su $U \cap V$

$\Rightarrow \exists f \in \mathcal{M}(X)$ t.c. $\eta = f \cdot \omega$.

<u>OSS. 2</u> Sia $U \subseteq X$ aperto e $f \in \mathcal{O}(U)$

Allora si definisce una 1-forma olomorfa df su U che in coord. locali è data da:

$$df = f'(z)\, dz.$$

Esercizio

Verificare che:

1) df è ben definito

2) coincide con il differenziale usato C^∞

$\leadsto df \in \Omega^1(U)$.

Se invece abbiamo $g \in \mathcal{M}(U)$ allora: $g \in \mathcal{O}(U \setminus S)$ S discreto in U

$\Rightarrow dg \in \Omega^1(U \setminus S)$

e localmente $dg = \underbrace{f'(z)}_{\text{meromorfa}}\, dz$

$\Rightarrow df$ è meromorfa su U

$\Rightarrow dg \in \mathcal{M}^{(1)}(U)$

Se f è non costante, allora $df \neq 0$.

Coroll. Ogni superficie di Riemann compatta ammette 1-forme meromorfe $\neq 0$.

(infatti: $\exists f \in \mathcal{M}(X)$, non costanti). $\rightsquigarrow df$.

DIVISORI CANONICI.

Sia X una superficie di Riemann e ω una 1-forma meromorfa su X, $\omega \neq 0$. Il DIVISORE di ω è

$$\mathrm{div}(\omega) = \sum_{p \in X} (\mathrm{ord}_p \omega) \cdot p .$$

- Un divisore di questa forma si dice DIVISORE CANONICO e si indica con K_X

Nota: se $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$

$f \cdot \omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) \setminus \{0\}$

e $\mathrm{div}(f \cdot \omega) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(\omega)$.

Lemma. Sia D un divisore su X.

Allora

D è un divisore canonico $\Longleftrightarrow$ $D \sim \mathrm{div}(\omega)$

$\boxed{\text{DIM.}}$ $\boxed{\Longrightarrow}$ Se $D = \mathrm{div}(\eta)$, η 1-forma meromorfa $\neq 0$

- $\exists f \in \mathcal{M}(X)$ t.c. $\eta = f \cdot \omega$

lemma

$f \neq 0$

$\Rightarrow D = \mathrm{div}(\eta) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(\omega) \sim \mathrm{div}(\omega)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Se $D \sim \mathrm{div}(\omega)$

$\Rightarrow \exists f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ t.c.

$$D - \mathrm{div}(\omega) = \mathrm{div}(f)$$

$\Rightarrow D = \mathrm{div}(\omega) + \mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(f \cdot \omega)$

$\Rightarrow D$ canonico.

$\rightsquigarrow$ i divisori canonici formano una classe di equivalenza lineare in $\mathrm{Div}(X)$

$\rightsquigarrow$ se X è compatta: hanno tutti lo stesso grado

Es: $X = \mathbb{C}_\infty \Rightarrow \deg K_X = -2$.

Sia $F: X \to Y$ mappa olomorfa non costante tra sup. di Riemann.

Se $q \in Y$ definiamo

$$F^*(q) = \sum_{p \in F^{-1}(q)} (\mathrm{mult}_p F) \cdot p$$

$\rightsquigarrow$ $F^*(q)$ è supportato nella fibra $F^{-1}(q)$.

La definizione si estende per linearità: se $D = \sum_q n_q\, q$ divisore su Y poniamo

$$F^*(D) := \sum_q n_q\, F^*(q)$$

$\rightsquigarrow$ $F^* : \mathrm{Div}(Y) \longrightarrow \mathrm{Div}(X)$ omo di gruppi.

<u>Lemma</u> Sia $f \in \mathcal{M}(Y) \setminus \{0\}$.
Allora

$$F^*(\mathrm{div}(f)) = \mathrm{div}(\underbrace{f \circ F}_{\substack{\text{meromorfa su } X \\ \neq 0}})$$

DIM. Se $p \in X$ abbiamo:

$$\underbrace{\mathrm{ord}_p(f \circ F)}_{\substack{\text{coeff. di } p \\ \text{in } \mathrm{div}(f \circ F)}} = \underbrace{(\mathrm{mult}_p F) \cdot \underbrace{\mathrm{ord}_{F(p)} f}_{\substack{\text{coeff. di } F(p) \\ \text{in } \mathrm{div}(f)}}}_{\substack{\text{coeff. di } p \text{ in} \\ F^*(\mathrm{div}\, f)}}$$

(esercizio).

$\rightsquigarrow$ il pull-back di un divisore principale è principale

$\leadsto F^*$ induce un omo di gruppi

$$F^* : \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X).$$

Supponiamo ora X e Y compatte.

Allora se $q \in Y$

$$\deg F^*(q) = \sum_{p \in F^{-1}(q)} \mathrm{mult}_p F = \deg F$$

$\Rightarrow$ se D è un divisore su Y

$$\deg F^*(D) = (\deg F) \cdot (\deg D)$$

Il DIVISORE DI RAMIFICAZIONE di F è

$$R_F := \sum_{p \in X} (\mathrm{mult}_p F - 1) \cdot p$$

$\Rightarrow$ Supp R_F = i punti di ramificazione di F

e la formula di Hurwitz è:

$$2g(X) - 2 = (\deg F) \cdot (2g(Y) - 2) + \boxed{\deg R_F}$$

OSS (pullback di 1-forme olomorfe/meromorfe)

Sia $F : X \to Y$ mappa olom. non costante

ω 1-forma olomorfa su Y

Localmente: z coord. locale su X

w " " su Y

$w = f(z)$ espressione locale di F

$\omega = a(w)\,dw$

$\rightsquigarrow$ si definisce $F^*\omega$ localmente come

$$F^*\omega = a(f(z))\, f'(z)\, dz$$

Esercizio Verificare che $F^*\omega$ è definita globalmente e che coincide con il pull-back come 1-forme C^∞.

Allo stesso modo: se ω è 1-forma meromorfa su Y

$\Rightarrow$ $F^*\omega$ è una 1-forma meromorfa su Y.

<u>Prop</u> Sia $F: X \to Y$ olomorfa e non costante, e ω una 1-forma meromorfa su Y, $\omega \neq 0$. Allora:

$$\underbrace{\operatorname{div}(F^*\omega)}_{\text{divisore canonico su } X} = F^*(\underbrace{\operatorname{div}\omega}_{\text{divisore canonico su } Y}) + R_F$$

$\boxed{\text{DIM.}}$ Sia $q \in Y$. Allora q compare con $(\operatorname{ord}_q \omega)\cdot q$ in $\operatorname{div}(\omega)$

$\rightsquigarrow$ il pull-back è

$$\sum_{p \in F^{-1}(q)} (\operatorname{ord}_q \omega)\cdot(\operatorname{mult}_p F)\cdot p$$

so i punti $p \in F^{-1}(q)$ hanno coeff. in $F^*(\operatorname{div} \omega) + R_F$:

$(\operatorname{ord}_q \omega) \cdot (\operatorname{mult}_p F) + \operatorname{mult}_p F - 1$

dobbiamo mostrare che è $\operatorname{ord}_p F^*\omega$.

Scegliamo coordinate locali:

z in X, centrate in p

w in Y, centrata in q

t.c. l'espressione locale di F sia

$w = z^m$ con $m = \operatorname{mult}_p F$.

localmente, $\omega = a(w)\, dw$ a meromorfa

$F^*\omega = a(z^m) \cdot m z^{m-1}\, dz$

$\Rightarrow \operatorname{ord}_p F^*\omega = \operatorname{ord}_0 \left(z^{m-1} \cdot a(z^m) \right) =$

$= \operatorname{ord}_0 z^{m-1} + \operatorname{ord}_0 a(z^m) =$

$= m - 1 + m \cdot \operatorname{ord}_0 a =$

$= m \cdot \operatorname{ord}_q \omega + m - 1$. $\boxed{}$

<u>Coroll.</u> Sia X una superficie di Riemann cpta. Allora $\deg K_X = 2g(X) - 2$

$\boxed{\text{DIM}}$ $\exists f \in \mathcal{M}(X)$ non costante, (12)
sia $F : X \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ la mappa associata (no F non costante)

Sia ω una 1-forma meromorfa su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $\omega \neq 0$.

Allora $F^*\omega$ è una 1-forma meromorfa su X

$\Rightarrow \operatorname{div}(F^*\omega) \sim K_X$

$\Rightarrow \deg K_X = \deg(\operatorname{div}(F^*\omega))$

$\Rightarrow$ basta mostrare che

$\deg \operatorname{div}(F^*\omega) = 2g(X)-2$.

Abbiamo:

$$\operatorname{div}(F^*\omega) = F^*(\operatorname{div}\omega) + R_F.$$

Prendendo i gradi

$$\deg(\operatorname{div}(F^*\omega)) = \deg F^*(\operatorname{div}\omega) + \deg R_F$$

$$= (\deg F) \cdot \underbrace{\deg(\operatorname{div}\omega)}_{=-2 \text{ (esempio)}} + \deg R_F =$$

$$= (\deg F) \cdot (2g(\mathbb{P}^1) - 2) + \deg R_F$$

$$= 2g(X) - 2.$$

Hurwitz

Nota: se $F : X \to Y$ è non costante tra sup. di R. cpte
e ω è una 1-forma meromorfa su Y, $\omega \neq 0$

$$\mathrm{div}(F^*\omega) = F^*(\mathrm{div}\,\omega) + R_F$$

$$\Big\downarrow \text{gradi}$$

$$2g(X) - 2 = (\deg F)\cdot(2g(Y) - 2) + \deg R_F$$

<u>**OSS**</u> Sia X una superficie di R. e K_X un divisore canonico.
Allora i fasci Ω^1_X

e $\mathcal{O}_X(K_X)$

sono <u>isomorfi</u>.

Dim. Infatti: $K_X = \mathrm{div}(\omega)$ ω 1-forma su X, $\omega \neq 0$
Se $U \subseteq X$ è un aperto definiamo

$$\varphi_U : \mathcal{O}_X(K_X)(U) \longrightarrow \Omega^1_X(U)$$
$$f \longmapsto f \cdot \omega_{|U}$$

Nota: $\mathrm{div}(f\cdot\omega_{|U}) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(\omega_{|U})$
$= \mathrm{div}(f) + K_{X|U} \geq 0$

$\Rightarrow f \cdot \omega_{|U}$ è olomorfa su U

$\Rightarrow \varphi_U$ è ben definita.

$\leadsto \varphi : \mathcal{O}_X(K_X) \longrightarrow \Omega^1_X$ morfismo di fasci

- φ_U è iniettivo
- Mostriamo che φ_U è anche suriettivo

Sia $\eta \in \Omega^1_X(U)$

Sia $U = \coprod_\alpha U_\alpha$ la decomp. in comp. connesse
(aperti di X)

$\forall \alpha \ \exists f_\alpha \in \mathcal{M}(U_\alpha)$ t.c. $\eta_{|U_\alpha} = f_\alpha \cdot \omega_{|U_\alpha}$

$\leadsto$ le f_α danno $f \in \mathcal{M}(U)$ t.c.

$$\eta = f \cdot \omega_{|U} \quad \underline{\underline{\text{su } U}}.$$

Abbiamo:

$$0 \le \operatorname{div}(\eta) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(\omega_{|U})$$

η olomorfa

$$= \operatorname{div}(f) + K_{X|U}$$

$$\Rightarrow f \in \mathcal{O}(K)(U). \quad \boxtimes$$

Nelle interpretazioni note di $\mathrm{Pic}(X)$ abbiamo lo stesso effetto:

$\mathrm{Pic}(X) = $ divisori / equiv. lineare $\qquad [K_X]$

~~fibrati~~ fasci invertibili / iso $\qquad \mathcal{O}_X(K_X) \cong \Omega^1_X$

fibrati lineari / iso $\qquad$ $\mathcal{T}_X^*$ cotangente olomorfo (15)

$H^1(X, \mathcal{O}^*)$ $\qquad$ inverso del cociclo del tangente

Dualità di Serre:

Teorema. Sia X una superficie di Riemann cpta e D un divisore su X. Allora esiste un isom. naturale di spazi vettoriali complessi:
duale

$$H^0(\mathcal{O}_X(K_X - D)) \cong H^1(\mathcal{O}_X(D))^*$$

Coroll. 1 Per ogni ~~gran~~ divisore D su X si ha:

$$h^0(\mathcal{O}_X(D)) = h^1(\mathcal{O}_X(K_X - D))$$

e

$$h^1(\mathcal{O}_X(D)) = h^0(\mathcal{O}_X(K_X - D))$$

$\boxed{\text{DIM.}}$ La II relazione segue dal teorema. La I relazione segue dalla II per $\tilde{D} = K_X - D$.

Coroll. 2 (uguaglianza dei 3 generi). Sia X una superficie di Riemann cpta si ha: $g_{top}(X) = h^1(X, \mathcal{O}_X) = h^0(X, \Omega^1$

($h^0(X, \Omega^1_X) = \dim_{\mathbb{C}} \Omega^1(X) =$
= dimensione dello spazio vett. delle 1-forme olomorfe su X).

$\boxed{\text{DIM.}}$ Dal Coroll. 1 per $D=0$ otteniamo

$$1 = h^0(\mathcal{O}_X) = h^1(\mathcal{O}_X(K_X))$$

$$h^1(\mathcal{O}_X) = h^0(\underbrace{\mathcal{O}_X(K_X)}_{\cong\ \Omega^1_X}) = h^0(\Omega$$

Ricordiamo la formula di R.R:
$\forall D$ si ha

$$h^0(\mathcal{O}_X(D)) - h^1(\mathcal{O}_X(D)) = \deg D + 1 - h^1(\mathcal{O}$$

Applicandola a $D = K_X$

$$\rightsquigarrow h^0(\mathcal{O}_X(K_X)) - \underbrace{h^1(\mathcal{O}_X(K_X))}_{1} = 2g(X) - 2$$
$$+ 1 - h^1(\mathcal{O}_X)$$

$$\rightsquigarrow 2\, h^0(\mathcal{O}_X(K_X)) = 2g(X)$$
$$\to h^0(\mathcal{O}_X(K_X)) = g(X)$$
$$\qquad \| $$
$$h^0(\Omega^1_X). \qquad \blacksquare$$

Nota: in particolare:
$g(X) = 0 \implies H^0(\Omega^1_X) = \{0\} \implies$ X non ha 1-forme olomorfe $\neq 0$

Se $p(X) > 0 \Rightarrow H^0(\Omega^1 X) \neq \{0\}$

$\Rightarrow \exists$ sempre 1-forme olomorfe $\neq 0$ su X.

Teorema di Riemann-Roch:

Sia X una sup. di R. cpta e D un divisore su X. Allora:

$$h^0(\mathcal{O}_X(D)) - h^0(\mathcal{O}_X(K_X - D)) = \deg D + 1 - g(X).$$

(segue dalla formula R.R. debole con dualità di Serre e $h^1(\mathcal{O}_X) = g(X)$)

Coroll. Se sia X sup. R. cpta e D un divisore su X. Se

$$\deg D \geq 2g - 1$$

allora: $h^1(\mathcal{O}(D)) = 0$

e $h^0(\mathcal{O}(D)) = \deg D + 1 - g.$

$\boxed{\text{DIM.}}$ $\deg(K_X - D) = 2g - 2 - \deg D < 0$

$\Rightarrow h^0(\mathcal{O}(K_X - D)) = 0$

$\parallel \Leftarrow$ dualità di Serre.

$h^1(\mathcal{O}(D))$

Corollario Sia X una sup. di R. cpta con $g(X)=0$. Allora $X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

$\boxed{\text{DIM.}}$ Sia $D = p$ $\quad p \in X$.

$$\deg D = 1 \geq 2g-1$$

$$\Rightarrow h^0(\mathcal{O}(p)) = 1+1 = 2.$$

($H^0(X, \mathcal{O}_X(p))$ sono funzioni olomorfe su $X \setminus \{p\}$ e aventi al più un polo mer. semplice in p; contengono $\mathbb{C}$ = olomorfe su X)

$\Rightarrow \exists\, f \in H^0(\mathcal{O}_X(p))$ non costante

$\Rightarrow f$ ha un unico ~~zero~~ polo in p, semplice

$\Rightarrow f$ induce un iso $X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.