Esercizi da Miranda:

Es. C, D p. 137.

Mappe nello spazio proiettivo.

Sia X superficie di Riemann.

Siano $f_0, \dots, f_n \in \mathcal{M}(X)$, $f_i \neq 0 \ \forall i$.

~~Definiamo~~ Vorremmo definire

$$\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$$
$$p \longmapsto [f_0(p) : \ \ : f_n(p)].$$

- la ϕ è definita nei punti $p \in X$ t.c.
  - ogni f_i è regolare in p
  - $\exists f_i$ non nulla in p.

Allora nell'intorno $U(p)$ di p si ha

$$\phi : U(p) \longrightarrow \mathbb{C}^n = U_i \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$$

$$\phi = \left(\frac{f_0}{f_i}, \dots, \frac{f_n}{f_i} \right) \quad \text{olomorfa in } p$$

$\Rightarrow \phi$ olomorfa in p.

<u>Lemma</u> ϕ si estende ad un'applicazione olomorfa $\phi : X \to \mathbb{P}^n$.

$\boxed{\text{DIM}}$ Sia $p \in X$ e $m := \min_{i=0,\dots,n} \operatorname{ord}_p f_i$

Oss. Se:

$m<0 \iff f_i$ t.c. f_i ha un polo in p

$m>0 \iff$ tutte le f_i sono regolari e nulle in p

$\leadsto$ se $m=0$, la ϕ è ~~regolare~~ definita in p

Sia U un intorno aperto di p t.c.:

- $\exists$ z coord. locale per X in U, centrata in p
- ogni f_i è olomorfa in $U \setminus \{p\}$
- le f_i non hanno zeri comuni in $U \setminus \{p\}$

$\leadsto$ $\phi : U \setminus \{p\} \to \mathbb{P}^n$ è definita e olomorfa.

Siano: $g_i(z) := z^{-m} f_i(z)$

$\forall i = 0, \dots, n$.

$\leadsto$ g_i è olomorfa in $U \setminus \{p\}$

e $\mathrm{ord}_p\, g_i = -m + \mathrm{ord}_p\, f_i \geq 0$

$\leadsto$ g_i è olomorfa in U.

Inoltre: se i_0 è t.c. $\mathrm{ord}_p\, f_{i_0} = m$, allora $g_{i_0}(p) \neq 0$ $(\mathrm{ord}_p\, g_{i_0} = 0)$.

In $U \setminus \{p\}$ abbiamo:

$\phi(z) = (f_0(z) : \quad : f_n(z)) =$

$= (z^{-m} f_0(z) : \quad : z^{-m} f_n(z)) =$

$= (f_0(z) : \quad : f_n(z))$ risultano definite e olomorfe in p.

<u>Note</u>: $g_i(p) = 0 \iff \mathrm{ord}_p f_i > 0$

$\iff \mathrm{ord}_p f_i > m = \min_j \mathrm{ord}_p f_j$.

Sia ora X compatta e D un divisore t.c. $H^0(\mathcal{O}_X(D)) \neq \{0\}$.

Consideriamo una base $f_0, \dots, f_n$ di $H^0(\mathcal{O}_X(D))$

e definiamo

$$\phi_D : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$$
$$p \longmapsto (f_0(p) : \quad : f_n(p)).$$

- ϕ_D è ben definita e olomorfa
- $n = h^0(\mathcal{O}(D)) - 1$.
- cambiando la base di $H^0(\mathcal{O}_X(D))$, la ϕ_D viene composta con una proiettività.

<u>Es.</u> $X = \mathbb{C}_\infty \qquad D = 2\infty$

$H^0(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{O}(D)) = \{ g(z) \mid g \in \mathbb{C}[z]$ polinomi di grado $\leq 2 \}$.

base: $1, z, z^2$

$\phi_D : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \qquad \phi_D(z) = (1 : z : z^2)$

$\mathbb{C}_\infty \hookrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \quad (x_0 : x_1)$

$$z = \frac{x_1}{x_0}$$

$\rightsquigarrow \phi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$

$$(x_0 : x_1) \longmapsto \left(1 : \frac{x_1}{x_0} : \frac{x_1^2}{x_0^2}\right) =$$

$$= (x_0^2 : x_0 x_1 : x_1^2).$$

<u>Richiamo</u>: $\forall p \in X$

$$H^0(\mathcal{O}_X(D-p)) \subseteq H^0(\mathcal{O}_X(D))$$

e si ha:

$H^0(\mathcal{O}_X(D-p)) = H^0(\mathcal{O}_X(D))$

$H^0(\mathcal{O}_X(D-p))$ iperpiano in $H^0(\mathcal{O}_X(D))$.

<u>Def</u> Il punto p è un PUNTO BASE per il divisore D se:

$$H^0(\mathcal{O}_X(D-p)) = H^0(\mathcal{O}_X(D)).$$

Significa che: se $f \in H^0(\mathcal{O}_X(D))$

cioè $\mathrm{ord}_q f \geq -D(q) \ \forall q$

allora automaticamente si ha

$$\mathrm{ord}_p f \geq \underbrace{-(D(p)-1)}_{= -D(p)+1}$$

cioè: $\nexists f \in H^0(\mathcal{O}_X(D))$ con $\mathrm{ord}_p f = -D(p)$.

In tal caso si ha:

$$\phi_D = \phi_{D-p}.$$

<u>Lemma</u>. Dato D, con $H^0(\mathcal{O}(D)) \neq 0$,

$\exists F$ divisore effettivo t.c.:

1) $D-F$ non ha punti base

cioè: $H^0(\mathcal{O}(D-F-p)) \subsetneq H^0(\mathcal{O}(D-F))$

$\forall p \in X$.

2) $H^0(\mathcal{O}(D-F)) = H^0(\mathcal{O}(D))$

$$\Rightarrow \phi_D = \phi_{D-F}.$$

$\boxed{\text{DIM}}$ Se D non ha punti base: prendiamo $F=0$.

Se D ha un punto base p_1, consideriamo $D_1 := D - p_1$.

Se D_1 non ha punti base: $F = p_1$.

Se D_1 ha un punto base, consideriamo

$D_2 = D_1 - p_2$, e così via.

Siccome $H^0(\mathcal{O}(D - \sum_{i=1}^{r} p_i)) = 0$

se $r > \deg D$

mentre $0 \neq H^0(\mathcal{O}(D)) = H^0(\mathcal{O}(D_1)) = H^0(\mathcal{O}(D_2 \dots$

$\rightsquigarrow$ al più in $\deg D$ passi troviamo un divisore senza punti base.

<u>Prop.</u> Sia D un divisore con $H^0(\mathcal{O}(D)) \neq 0$ e senza punti base. Siano $p, q \in X$, $p \neq q$.

<u>Allora</u>

$$\phi_D(p) = \phi_D(q) \iff H^0(\mathcal{O}_X(D-p-q)) = H^0(\mathcal{O}_X(D-p)) = H^0(\mathcal{O}_X(D-q)).$$

$\boxed{\text{DIM}}$. p non è un punto base per D

$$\Rightarrow \underbrace{H^0(\mathcal{O}_X(D-p))}_{\text{è un iperpiano}} \subsetneq H^0(\mathcal{O}_X(D))$$

Sia $f_1, \dots, f_n$ una base di $H^0(\mathcal{O}_X(D-p))$ e sia $f_0 \in H^0(\mathcal{O}_X(D)) \setminus H^0(\mathcal{O}_X(D-p))$

$\rightsquigarrow \{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ base di $H^0(\mathcal{O}_X(D))$

$\rightsquigarrow \phi_D = (f_0 : \quad : f_n) : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$.

Se $i \in \{1, \dots, n\}$ $\quad \operatorname{ord}_p f_i \geq -D(p) + 1 > -D(p)$

e: $\quad \operatorname{ord}_p f_0 = -D(p)$

$$\rightsquigarrow -D(p) = \min_{i=0,\dots,n} \operatorname{ord}_p f_i$$

$$\Rightarrow \phi_D(p) = (1 : 0 : \quad : 0) \in \mathbb{P}^n.$$

Abbiamo:

$$\phi_D(q) = \phi_D(p) \iff \phi_D(q) = (1 : 0 \quad : 0)$$

$\Longleftrightarrow \mathrm{ord}_q f_i > \mathrm{ord}_q f_0 \quad \forall i = 1,.., n.$ (7)

Note: $\mathrm{ord}_q f_j \geq -D(q) \quad \forall j = 0,.., n$

Inoltre: q non è un punto base

$\Rightarrow H^0(\mathcal{O}(D-q)) \subsetneq H^0(\mathcal{O}(D))$

$\Rightarrow \exists j \in \{0,.., n\}$ t.c. $f_j \notin H^0(\mathcal{O}(D-q))$

cioè: $\mathrm{ord}_q f_j = -D(q)$

Quindi:

$\phi_D(q) = \phi_D(p) \Longleftrightarrow \mathrm{ord}_q f_0 = -D(q)$

e $\mathrm{ord}_q f_i > -D(q)$

$\forall i = 1,.., n.$

$\Updownarrow$

$f_1,.., f_n \in H^0(\mathcal{O}(D-q))$

$\Updownarrow$

$H^0(\mathcal{O}(D-p)) = H^0(\mathcal{O}(D-q)).$

Pertanto abbiamo $\Leftarrow$

Per mostrare $\Rightarrow$

$$H^0(\mathcal{O}(D-p)) = H^0(\mathcal{O}(D-q)) \cup\!\!| \; H^0(\mathcal{O}(D-p-q))$$

Sia $f \in H^0(\mathcal{O}(D-p))$

$= H^0(\mathcal{O}(D-q)).$

Allora: $\mathrm{ord}_p f \geq -D(p) + 1$

$\mathrm{ord}_q f \geq -D(q) + 1$

e $\mathrm{ord}_r f \geq -D(r) \quad \forall r \in X \setminus \{p, q\}$

$\Rightarrow f \in H^0(\mathcal{O}(D-p-q)) \Rightarrow$ ~~ok~~ . (8)

Coroll. Sia D un divisore. ~~Allora~~

~~ϕ_D è iniettiva~~ Supponiamo che:

$$h^0(\mathcal{O}_X(D-p-q)) = h^0(\mathcal{O}_X(D)) - 2$$

$$\forall p, q \in X, p \neq q.$$

Allora ϕ_D è iniettiva.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Abbiamo, se $p \neq q$:

$$H^0(\mathcal{O}_X(D-p-q)) \underset{\neq}{\subset} H^0(\mathcal{O}_X(D-p)) \underset{\neq}{\subset} H^0(\mathcal{O}(D))$$

$\leadsto p$ non è un punto base $\leadsto D$ non ha punti base.

Allora dalla Prop. precedente:

ϕ_D è iniettiva.

<u>Es.</u> $X = \mathbb{C}_\infty \quad D = 2\infty \quad h^0(\mathcal{O}(D)) = 3$

Dati $p, q \in \mathbb{C}_\infty \quad D-p-q$ ha grado zero

$\Rightarrow D-p-q$ è principale

$\Rightarrow \mathcal{O}(D-p-q) \cong \mathcal{O}_X \Rightarrow h^0(\mathcal{O}(D-p-q)) = 1 = 3-2$

$\Rightarrow \phi_D$ è iniettiva.

<u>Es.</u> Sia $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ data da:

$$\phi(x_0 : x_1) = (x_0^3 : x_0 x_1^2 : x_1^3).$$

Esercizio Verificare che ϕ è iniettiva e che l'immagine in $\mathbb{P}^2$ $(y_0 : y_1 : y_2)$ è la curva di equazione:

$$\underbrace{y_1^3 = y_0 y_2^2}_{\text{singolare in } (1:0:0)}$$

Studiamo quando $\phi_D : X \to \mathbb{P}^n$ è un embedding, ovvero:

- $\phi_D(X) \subset \mathbb{P}^n$ è una sottovarietà complessa
- $\phi_D : X \xrightarrow{\sim} \phi_D(X)$ è biolomorfismo

Supponiamo : D senza punti base e ϕ_D iniettiva

Sia $p \in X$ e cerchiamo un criterio perché ϕ_D sia un embedding nell'intorno di p

Scegliamo una base $f_0, \ldots, f_n$ di $H^0(\mathcal{O}(D))$

t.c. $\mathrm{ord}_p f_0 = -D(p)$

$\mathrm{ord}_p f_i > -D(p)$ $\forall i = 1, \ldots, n$

$\Rightarrow \phi_D(p) = (1 : 0 \quad : 0)$

$\leadsto$ localmente

$$\phi_D : U(p) \to \mathbb{C}^n$$

$$\underbrace{\left(\frac{f_1}{f_0}, \dots, \frac{f_n}{f_0}\right)}_{\text{olomorfe e nulle in } p}$$

Supponiamo che $\exists i \in \{1, .., n\}$ t.c. $\text{ord}_p\left(\frac{f_i}{f_0}\right) = 1 \iff \text{ord}_p f_i = 1 - D(p)$

per semplicità sia $i = 1$.

Allora localmente

$\phi_D = (h_1 .., h_n)$ h_i olom. e nulle in p

$\text{ord}_p h_1 = 1$

~~Fis~~ Allora: $h_1 : U(p) \to \mathbb{C}$] è biolomorfismo locale. $p \longmapsto 0$

$$\phi_D(z) = \underbrace{(h_1(z), .., h_n(z))}_{\in \mathbb{C}^n} \qquad z \in U(p)$$

~~componendo localmente la ϕ_D con l'inversa di h_1 ψ:~~

· $\phi_D(U(p)) \subseteq \mathbb{C}^n$ è grafico di funzioni olomorfe

Precisamente abbiamo:

$$\begin{array}{c} U(p) \subseteq X \\ {}^{\text{coord. locale per } X} \swarrow\!\!\cong \\ 0 \in A \subseteq \mathbb{C} \xrightarrow{h_1} \tilde{A} \subseteq \mathbb{C} \ni 0 \end{array}$$

• h_1 è biolom. locale

$$\begin{array}{ccc} U(p) & \longrightarrow & A \subseteq \mathbb{C} \\ & & \big\downarrow h = (h_1, \ldots, h_n) \\ & & \mathbb{C}^n \end{array}$$

l'immagine è grafico di funzioni olomorfe

$\cancel{(h_1(z), \ldots, h_n(z))}$

$$\tilde{A} \xrightarrow{(h_1)^{-1}} A \xrightarrow{h = (h_1, \ldots, h_n)} \mathbb{C}^n$$

$$w \longmapsto z = h_1^{-1}(w) \longmapsto (w, k_2(w), \ldots, k_n(w))$$

k_i olomorfe.

$\Rightarrow \Phi_D(U(p)) = \{(w, h_2(w), \ldots, h_n(w)) \mid w \in \tilde{A}\}$

è una sottovarietà complessa di $\mathbb{C}^n$ e quindi di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. di dim 1

Se questo vale nell'intorno di ogni p: allora $\Phi_D(X)$ è una superficie di Riemann

e $\Phi_D : X \longrightarrow \Phi_D(X)$ è olomorfa e biunivoca

$\Rightarrow \Phi_D$ è biolomorfismo.

La condizione richiesta in p era che: (12)

$\exists i \in \{1, \dots, n\}$ t.c.

$$\mathrm{ord}_p f_i = -D(p)+1$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathrm{ord}_p f_0 = -D(p) \\ \mathrm{ord}_p f_j \geq -D(p) \quad \forall j = 1, \dots, n \end{array} \right).$$

Abbiamo: $f_1, \dots, f_n$ è una base di $H^0(\mathcal{O}(D-p))$

La condizione richiesta è equivalente

$$\underbrace{H^0(\mathcal{O}(D-2p))}_{\text{contiene la } g \in H^0(\mathcal{O}(D)) \text{ t.c. } \mathrm{ord}_p g \geq -D(p)+2.} \subsetneq H^0(\mathcal{O}(D-p))$$

Abbiamo allora:

<u>Teorema</u> Sia X una sup. di Riemann cpta e D un divisore su X t.c.

$$h^0(\mathcal{O}_X(D-p-q)) = h^0(\mathcal{O}_X(D))-2$$

$\forall p, q \in X$. (NB anche per $p=q$!)

Allora: $\Phi_D(X) \subseteq \mathbb{P}^n$ è una superficie di Riemann e

e $\Phi_D : X \to \Phi_D(X) \subseteq \mathbb{P}^n$ è biolomorfismo. (cioè Φ_D è EMBEDDING)

DIM La condizione per $p \neq q$ ci dice che D è senza punti base e che ϕ_D è iniettiva.

Per $p = q$:

$$H^0(\mathcal{O}(D-2p)) \subsetneq H^0(\mathcal{O}(D-p)) \subsetneq H^0(\mathcal{O}(D)))$$

$\rightsquigarrow$ ϕ_D è embedding in p.

Def Si dice che D è MOLTO AMPIO se ϕ_D è un embedding.

Si dice che D SEPARA I PUNTI quando ϕ_D è iniettiva.

Applicazione di Riemann-Roch

Prop. Sia X una superficie di Riemann cpta e D un divisore su X.

Se $\deg D \geq 2g$, allora D è senza punti base.

Se $\deg D \geq 2g+1$, allora D è molto ampio ($\rightarrow \phi_D$ embedding).

DIM. $h^0(\mathcal{O}(D)) - h^0(\mathcal{O}(K_X - D)) = \deg D + 1 - g$ (R.R.)

Se $\deg(K_X - D) < 0$: allora $h^0(\mathcal{O}(K-D)) =$

$\Rightarrow h^0(\mathcal{O}(D)) = \deg D + 1 - g.$

$\deg(K_X - D) = 2g - 2 - \deg D < 0$

sse $\deg D \geq 2g - 1$.

- D è senza punti base

$\Leftrightarrow H^0(\mathcal{O}(D-p)) \subsetneq H^0(\mathcal{O}(D)) \ \forall p \in X$

$\Leftrightarrow h^0(\mathcal{O}(D-p)) = h^0(\mathcal{O}(D)) - 1 \ \forall p \in X.$

Se $\deg D \geq 2g$:

$\Rightarrow \deg(D-p) \geq 2g - 1$

$\Rightarrow h^0(\mathcal{O}(D-p)) = \deg(D-p) + 1 - g$

$= \deg D - 1 + 1 - g =$

$= h^0(\mathcal{O}(D)) - 1. \quad \forall p \in X$

$\Rightarrow D$ è senza punti base.

Se $\deg D \geq 2g+1$: $\forall p, q \in X$

$\deg(D-p-q) \geq 2g - 1$

$\Rightarrow h^0(\mathcal{O}_X(D-p-q)) = \deg(D-p-q) + 1 - g$

$= \deg D - 2 + 1 - g = h^0(\mathcal{O}_X(D)) - 2$

$\Rightarrow D$ è molto ampio.

<u>Coroll.</u> Ogni superficie di Riemann compatta può essere immersa in modo olomorfo in $\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}$.

<u>Prop</u> Sia X una sup. di Riemann cpta e $p \in X$. Allora

$$\exists\ \phi : X \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

biolomorfismo tra $X \setminus \{p\}$ e una sottov. complessa di $\mathbb{C}^n$.

$\boxed{\text{DIM.}}$ Sia $D := (2g+1)p$ e siano

$f_0, \ldots, f_n$ base di $H^0(\mathcal{O}_X(D))$

$\rightsquigarrow f_0, \ldots, f_n$ sono olomorfe su $X \setminus \{p\}$

~~Possiamo inoltre sceglierle in modo t.c.~~

~~Se $\phi = (f_0 : \ldots : f_n)$, allora~~

~~$\phi(p) = (1 : 0 : \ldots : 0)$~~

e possiamo scegliere: $f_0 = 1$

$\Rightarrow \phi = (1 : f_1 : \ldots : f_n)$ espressione valida su $X \setminus \{p\}$

$\Rightarrow \phi(X \setminus \{p\}) \subseteq U_0 = \mathbb{C}^n$.

(<u>Teorema di Chow</u>: $X \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ sottovarietà complessa è sempre algebrica)

- in effetti: X può sempre essere immersa in modo olomorfo in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$.

<u>Divisori su curve proiettive.</u>

$X \subset \mathbb{P}^n$ superficie di Riemann compatta proiettiva

$(x_0 : \ldots : x_n)$

$F \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ omogeneo, non id. nullo su X.

$\rightsquigarrow X \cap V(F)$ in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

Vogliamo definire un divisore effettivo su X, che denoteremo con $V(F, X)$, supportato su

$$X \cap V(F) = \{p \in X \mid F(p) = 0\}$$

(i coefficienti terranno conto delle molteplicità di intersezione).

Sia $p \in X \cap V(F)$

e sia $G \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ omogeneo dello stesso grado di F e t.c. $G(p) \neq 0$.

(per esempio: $G = x_i^d$)

$f := \frac{F}{G}|X \in \mathcal{M}(X)$ è olomorfa e nulla in p

$\Rightarrow$ poniamo: $V(F,X)(p) := \mathrm{ord}_p f \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$