$$\deg D = (\deg \phi)(\deg Y).$$

$$\phi : X \longrightarrow Y$$

$\deg \phi = 1$

In particolare, se D è molto ampio: allora $\deg Y = \deg D$.

$\boxed{\text{DIM.}}$ Sia $H \subset \mathbb{P}^n$ un iperpiano. Allora:

$$\deg Y = \deg (H_{|Y})$$

e: $D \sim \phi^* H = \phi^* (H_{|Y})$

$$\Rightarrow \deg D = \deg \phi^* H = \deg \phi^* (H_{|Y}) =$$

$$= (\deg \phi) \cdot (\deg H_{|Y}) = (\deg \phi) \cdot (\deg Y)$$

<u>ES.</u> Sia X una sup. di Riemann cpta di genere 1.

- Un divisore D su X è molto ampio se $\deg D \geq 2g+1 = 3$.

Se D ha grado 3: D è molto ampio $\Rightarrow \phi_D$ è embedding

Abbiamo: $h^0(\mathcal{O}(D)) = \deg D + 1 - g$
$= 3$

$$\Rightarrow \phi_D : X \hookrightarrow \mathbb{P}^2.$$

$\Rightarrow X$ è isomorfa a una curva piana in $\mathbb{P}^2$, di grado $= \deg D = 3$.

<u>Corollario</u> Ogni sup. di R. cpta di genere 1 è biolomorfa a una curva piana.

<u>Prop</u> Sia X una superficie di R. cpta e $p \in X$. Allora $X \setminus \{p\}$ può essere immersa in $\mathbb{C}^n$.

<u>Dim</u> Sia $D = (2g+1)p$.
Allora D è molto ampio
$\Rightarrow \phi_D : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ è embedding.

Siccome $D \geq 0$, $\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{O}_X(D)$
$\Rightarrow$ ~~le costanti~~ $1 \in H^0(\mathcal{O}_X(D))$
$\Rightarrow$ scegliamo $f_0 = 1$ nella base $f_0, \ldots, f_n$.
Sia $H := V(x_0) \subset \mathbb{P}^n$.
$\Rightarrow \phi^* H = D + \underbrace{\mathrm{div}(f_0)}_{=0} = D$.

$\Rightarrow p = \mathrm{supp}\, D = \mathrm{supp}\, \phi^* H = \phi^{-1}(H \cap \phi(X))$
$\Rightarrow \forall q \neq p,\ \phi(q) \in \mathbb{P}^n \setminus H = U_0 = \mathbb{C}^n$
$\Rightarrow \phi_D : X \setminus \{p\} \hookrightarrow \mathbb{C}^n$.

3) Fibrati lineari olomorfi e gruppo di Picard.

$\S$ rango 1 (fibrati in rette)

Sia E un fibrato ~~lineare~~ olomorfo di rk 1

Il suo cociclo è $\{g_{\alpha\beta}\}$ $\{U_\alpha\}$

$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olomorfe mai nulle

$g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}_X(U_{\alpha\beta})$

Notazione: per ogni aperto $U \subseteq X$ varietà complessa

sia $\mathcal{O}_X^*(U) = \{ f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f$ è sempre $\neq 0 \}$.

- $\mathcal{O}_X^*(U)$ è un gruppo abeliano rispetto al prodotto, con elem. neutro 1
- $\mathcal{O}_X^*$ un fascio di gruppi abeliani, il fascio fascio delle funzioni olomorfe mai nulle

$\rightsquigarrow g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}_X^*(U_{\alpha\beta})$

$\rightsquigarrow g = \{g_{\alpha\beta}\}$ che è una 1-cocatena di Čech per $\mathcal{O}_X^*$ relativa al ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$
$\mathcal{U} =$

le condizioni (*) di cociclo garantiscono che g è ben definita ed è un cociclo, ovvero $dg = 0$. (13)

$\rightsquigarrow$ $\xi_E = [g] \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)$

$$\downarrow$$

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$$

$\rightsquigarrow$ il cociclo del fibrato lineare E permette di associare ad E una classe

$$\xi_E \in H^1(X, \mathcal{O}_X^*).$$

Fatto

- la classe ξ_E dipende solo da E e non dalla scelta del ricoprimento $\{U_\alpha\}$ e delle trivializzazioni locali $\{\phi_\alpha\}$.

Fatto: ogni classe in $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ viene da un fibrato lineare olomorfo E su X

(si sceglie un ricopr. $\mathcal{U}$ in cui la classe è rappr. $\Rightarrow$ si ha un cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$ $\Rightarrow$ si costruisce il fibrato lineare).

- $[g] \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ è nulla

$\Leftrightarrow$ g è un cobordo

$\Leftrightarrow$ $\exists\, h_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$ $\forall \alpha$ t.c.

su $U_{\alpha\beta}$ $g_{\alpha\beta} = \frac{h_\beta}{h_\alpha}$ $\Leftrightarrow$ $E \cong X \times \mathbb{C}$.

$$f' = \dots = \frac{8z(z-1)(1-2z^2)}{(2z-1)^3}$$

$\text{ord}_0 f' = 1$

$\text{ord}_1 f' = 1$

$\text{ord}_{\pm\sqrt{2}/2} f' = 1$

$\text{mult}_{\pm\sqrt{2}/2} F = 2$ $\qquad$ $\text{ord}_{\frac{1}{2}} f' = -3$

$f(\sqrt{2}/2) = f(-\sqrt{2}/2)$?

X varietà complessa

Abbiamo una corrispondenza biunivoca:

$$\underline{\left\{ \text{fibrati lineari olomorfi su } X \right\} \Big/ \text{isom}}\ \bigstar \longleftrightarrow \underbrace{H^1(X, \mathcal{O}^*)}_{\text{gruppo}}$$

Dati due fibrati lineari $E, \tilde{E}$

con cocicli $\{f_{\alpha\beta}\}$, $\{\tilde{f}_{\alpha\beta}\}$ in $\{U_\alpha\}$

il cociclo prodotto $\{f_{\alpha\beta} \cdot \tilde{f}_{\alpha\beta}\}$ corrisponde al fibrato $E \otimes \tilde{E}$.

$\rightsquigarrow$ l'insieme $\bigstar$ diviene un gruppo rispetto al prodotto tensoriale.

. l'elemento neutro è $X \times \mathbb{C}$ il fibrato banale

. l'inverso è il fibrato duale.

⇝ otteniamo un isomorfismo di gruppi con $H^1(X, \mathcal{O}^*)$.

⇝ GRUPPO DI PICARD.

$\mathrm{Pic}(X)$.

Fasci di sezioni di fibrati vettoriali.

X varietà complessa.

E fibrato olomorfo su X, di rango r

$$\pi : E \to X$$

⇝ $\mathcal{F}_E$ fascio delle sezioni olomorfe di E

$$\mathcal{F}_E(U) = \{ s : U \to E \text{ olomorfe t.c. } s(x) \in E_x \ \forall x \in U \}$$

$U \subseteq X$ aperto

$$= \{ s : U \to E \text{ olomorfe t.c. } \pi \circ s = id_U \}$$

Esercizio Verificare che $\mathcal{F}_E$ è un fascio di spazi vettoriali su $\mathbb{C}$ e di $\mathcal{O}_X$-moduli.

Infatti se $s \in \mathcal{F}_E(U)$ e $f \in \mathcal{O}_X(U)$ possiamo definire $(fs)(x) = \underbrace{f(x) \cdot \overbrace{s(x)}^{E_x}}_{\text{prodotto per scalare in } E_x}$

Divisori e fibrati lineari. (L13

Sia X una superficie di Riemann e D un divisore su X.

<u>OSS 1</u> D è LOCALMENTE PRINCIPALE, cioè:
$\exists \{U_\alpha\}$ ricoprim. aperto di X
t.c. $D_{|U_\alpha}$ sia principale $\forall \alpha$
ovvero $\exists f_\alpha \in \mathcal{M}(U_\alpha) \setminus \{0\}$ t.c.

$$D_{|U_\alpha} = \mathrm{div}(U_\alpha)$$

(possiamo per semplicità supporre U_α connesso).

$\boxed{\text{DIM.}}$ Sia $p \in \mathrm{supp}\, D$ e sia U_p un intorno aperto di p t.c.:

1) $U_p \cap \mathrm{supp}\, D = \{p\}$
2) $\exists z_p : U_p \to \mathbb{C}$ coord. locale centrata in p.

Possiamo inoltre supporre che:

$$U_p \cap U_q = \emptyset \quad \forall p, q \in \mathrm{supp}\, D \quad p \neq q.$$

Allora:

- $D_{|U_p} = D(p) \cdot p$
- z_p^n ha ordine n in p, $\forall n$

$\Rightarrow \mathrm{div}(z_p^{D(p)}) = D(p) \cdot p = D_{|U_p}$

$\Rightarrow D_{|U_p}$ è principale, $\forall p \in \operatorname{supp} D$.

Sia poi: $U_0 := X \setminus \operatorname{supp} D$ aperto di X

$\Rightarrow D_{|U_0} = 0 = \operatorname{div}(1)$ principale

$\Rightarrow \{U_0, U_p\}_{p \in \operatorname{supp} X}$ è il ricopr. aperto cercato.

<u>OSS. 2</u> Dato un divisore D, associamo a D una classe in $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, in questo modo:

equaz. locali per D

$D \sim \{U_\alpha, f_\alpha\}$ $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ ricopr. aperto di X, U_α connesso

$f_\alpha \in \mathcal{M}(U_\alpha)^*$ t.c.

$D_{|U_\alpha} = \operatorname{div}(f_\alpha)$

Su $U_{\alpha\beta}$:

$$\operatorname{div}(f_\alpha)_{|U_{\alpha\beta}} = D_{|U_{\alpha\beta}} = \operatorname{div}(f_\beta)_{|U_{\alpha\beta}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}\left(\frac{f_\beta}{f_\alpha}\right)_{|U_{\alpha\beta}} = \operatorname{div}(f_\beta)_{|U_{\alpha\beta}} - \operatorname{div}(f_\alpha)_{|U_{\alpha\beta}} = 0$$

$\Rightarrow g_{\alpha\beta} := \dfrac{f_\beta}{f_\alpha}$ è olomorfa e mai nulla in $U_{\alpha\beta}$

cioè: $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_{\alpha\beta})$.

· è facile vedere che le $\{f_{\alpha\beta}\}$ soddisfano le condizioni di cociclo

⇒ determinano un elemento

$$\xi_D \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*) \hookrightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^*).$$

Fatto: 1) ξ_D dipende solo da D, cioè scegliendo un altro ricopr. su cui D è principale, e delle altre f_α, si ottiene la stessa classe.

~~OSS ξ_D è un cob.~~

2) Dati due divisori D_1, D_2, si ha

$$\xi_{D_1+D_2} = \xi_{D_1} \cdot \xi_{D_2}$$

(perché le equaz. locali per $D_1 + D_2$ sono date dai prodotti delle equaz. locali per D_1 e di quelle per D_2).

⇝ abbiamo un omo di gruppi:

$$\mathrm{Div}(X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*).$$

OSS ξ_D ~~è un cobordo~~ $\Rightarrow \Leftrightarrow \{f_{\alpha\beta}\}$ è un cobordo

$\Leftrightarrow \exists\, h_\alpha \in \mathcal{O}_X^*(U_\alpha)$ t.c. $g_{\alpha\beta} = \frac{h_\beta}{h_\alpha}$ su $U_{\alpha\beta}$

$\Rightarrow$ su $U_{\alpha\beta}$ si ha: $\frac{h_\beta}{h_\alpha} = \frac{f_\beta}{f_\alpha}$

cioè: $h_\alpha \dfrac{f_\alpha}{h_\alpha} = h_\beta \dfrac{f_\beta}{h_\beta}$ su $U_{\alpha\beta}$

$\Rightarrow \tilde{f}_\alpha := h_\alpha \dfrac{f_\alpha}{h_\alpha} \in \mathcal{M}(U_\alpha)$ funz. meromorfe

t.c. $\tilde{f}_{\alpha|U_{\alpha\beta}} = \tilde{f}_{\beta|U_{\alpha\beta}}$

$\Rightarrow$ le $\tilde{f}_\alpha$ si incollano a $\tilde{f} \in \mathcal{M}(X)$.

Inoltre:

$$\operatorname{div}(\tilde{f})_{|U_\alpha} = \operatorname{div}(\tilde{f}_{|U_\alpha}) = \operatorname{div}\left(h_\alpha \frac{f_\alpha}{h_\alpha}\right)$$

$$= \underbrace{\cancel{\operatorname{div}(h_\alpha)}}_{=0} + \operatorname{div}(f_\alpha) \overbrace{- \operatorname{div}(h_\alpha)}^{=0} = D_{|U_\alpha}$$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div}(\tilde{f}) = D} \Rightarrow D$ è principale.

In effetti è un'equivalenza e si ha:

il nucleo della mappa

$$\operatorname{Div}(X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*)$$

sono i divisori principali.

Infine: ~~Tutto~~ la mappa è suriettiva.

~~Infatti dato un cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$, basta porre $f_{\alpha_0} = 1$ per qualche α_0~~

$\Rightarrow \mathrm{Pic}(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}^*)$

- lo stesso gruppo, a meno di iso, rappresenta:
  - i divisori a meno di equiv. lineare
  - i fibrati lineari a meno di iso
  - $\check{H}^1(X, \mathcal{O}^*)$ coom. di Čech.

Inoltre: $\mathcal{O}_X(D)$ è isomorfo al fascio delle sezioni del fibrato lineare ass. a D.

Ricordiamo che:

$\boxed{DOD}$

$$\deg : \mathrm{Pic}(X) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$$

e: $\deg$ è iso $\Leftrightarrow X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

$\rightsquigarrow \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{Z}$.

- abbiamo sempre due fibrati lineari speciali su X:

  $\underbrace{\mathcal{T}_X}_{\text{cociclo: derivate dei camb. di coordinate}}$ e $\mathcal{T}_X^*$ tangente e cotangente olomorfo

- il fascio delle sezioni di $\mathcal{T}_X^*$ è il fascio delle 1-forme olomorfe Ω^1_X

e: $\Omega^1_X \cong \mathcal{O}_X(K_X)$

$\Rightarrow$ in $Pic(X)$:

$$[K_X] \longleftrightarrow \mathcal{T}^*_X \longleftrightarrow \Omega^1_X$$

$[K_X] \in Div(X)/\sim$

$\mathcal{T}^*_X$ come fibrato lineare

$$[-K_X] \longleftrightarrow \mathcal{T}_X$$