ES. $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ / $\mathbb{C}_\infty$.

Richiamo (lezione 27/4):

$$D = \sum_{i=1}^{n} e_i \lambda_i + e_0 \infty$$ divisore su $\mathbb{C}_\infty$ grado $d \geq 0$

$$f = \prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_i)^{-e_i} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$$

$$D + \mathrm{div}(f) = d \cdot \infty$$

$$H^0(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{O}(D)) = \underbrace{\{ g(z) f(z) \mid g \in \mathbb{C}[z]_{\leq d} \}}_{\text{dipende da } D \text{ (tramite } f)}.$$

$\cong$ $\mathbb{C}$-spazio vett.

dipende da d e non da D (ma stiamo scegliendo una carta locale) $\longrightarrow$ $\mathbb{C}[z]_{\leq d}$

$\cong$ $\mathbb{C}$-spazio vett.

$\mathbb{C}[x_0, x_1]_d$ dipende solo da d

$(x_0 : x_1)$ coord. omogenee su $\mathbb{P}^1$.

Se $g(z) \in \mathbb{C}[z]_{\leq d} \longmapsto x_1^d \cdot g\left(\frac{x_0}{x_1}\right)$

$$q(z, 1) \longleftarrow q(x_0, x_1)$$

$$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{Z}$$

$$\underbrace{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)}_{\text{notazione a meno di isom.}} \longleftrightarrow d$$

(se D_1, D_2 hanno grado d $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(D_1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(D_2)$)

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)) \cong \begin{cases} 0 & d<0 \\ \cong \mathbb{C}[x_0,x_1]_d & d \geq 0 \end{cases}$$

Se consideriamo il sistema lineare

$$|D| = \{ D + \mathrm{div}\, h \mid h \in H^0(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{O}(D)) \}$$

$$h = g \cdot f \qquad g \in \mathbb{C}[t]_{\leq d}$$

$$\Rightarrow D + \mathrm{div}(g \cdot f) = \underbrace{D + \mathrm{div}(g) + \mathrm{div}(f)}_{d \cdot \infty}$$

$$= \mathrm{div}(g) + d \cdot \infty$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)|}}{|D|} = \{ \mathrm{div}(g) + d \cdot \infty \mid g \in \mathbb{C}[z]_{\leq d} \}$$

Scriviamo $g(z) = \lambda \cdot \prod_{i=1}^{m} (z - \mu_i)$

$$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$0 \leq m \leq d$$

$$\mathrm{div}(g) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i - m \cdot \infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{div}(g) + d \cdot \infty = \sum_{i=1}^{m} \mu_i + (d-m)\infty}$$

Omogeneizziamo g:

$$\rightsquigarrow G(x_0,x_1) = \lambda\, x_1^{d-m} \prod_{i=1}^{m} (x_0 - \mu_i x_1)$$

$$\in \mathbb{C}[x_0,x_1]_d$$

G ha d zeri su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, contati con molteplicità, è zero: (13)

$$\mu_i \leftrightarrow (\mu_i : 1) \quad i = 1, \dots, m$$

$$\infty \leftrightarrow (1:0) \quad \text{con molteplicità } d-m$$

(*) $\Rightarrow$ il divisore effettivo di grado d in $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)|$ associato a questa sezione è dato dagli zeri di G, contati con molteplicità:

$$|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)| \text{ "=" } \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1]_d) \to \text{ha dimensione } d$$

somma degli zeri di G su $\mathbb{P}^1$, contati con molteplicità. $\longleftrightarrow [G]$

<u>Se $d=1$</u>: $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)| = \{p \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\} = \mathbb{P}^1.$

<u>Se $d=2$</u>: $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)| =$ coppie di punti su $\mathbb{P}^1$

$\quad // \quad$

$\mathbb{P}^2$

$p+q$, $p \neq q$ $\qquad$ $2p$

$=$ coniche su $\mathbb{P}^1$

~~Sia~~ Fissiamo un punto $p = (a:b) \in \mathbb{P}^1$

e consideriamo (14)

$$Q = \{ p_0 + q \mid q \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \} \subseteq |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)|$$

in $\mathbb{C}[x_0, x_1]_2$ $\quad Q = \mathbb{P}(V)$

$$V = \{ (a x_1 - b x_0) \cdot \ell(x_0, x_1) \mid \ell(x_0, x_1) \in \mathbb{C}[x_0, x_1]_1 \}$$

$\Rightarrow$ Q è un sistema lineare (non completo), di dim. 1.

. p_0 è un punto base per Q.

Esercizio importante Verificare che $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$ è molto ampio $\forall d \geq 1$ e che la mappa associata

$$\phi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^d$$

immerge $\mathbb{P}^1$ come la curva razionale normale di grado d.

Sistemi lineari e mappe nello spazio proiettivo.

X sup. di Riemann cpta.

Sappiamo già che: date $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{M}(X)$ non nulle

allora $\phi = (f_1 : \dots : f_n) : X \to \mathbb{P}^n$ è una mappa olomorfa.

∘ Basta supporre che: $\exists i \in \{0,\dots,n\}$ con $f_i \not\equiv 0$.

Viceversa:

Lemma Sia X sup. di Riemann cpta e $\phi : X \to \mathbb{P}^n$ olomorfa. Allora esistono $f_0, \dots, f_n \in \mathcal{M}(X)$, non tutte id. nulle, t.c.

$$\phi = (f_0 : \dots : f_n).$$

$\boxed{\text{DIM.}}$ Siano $(x_0 : \dots : x_n)$ coord. in $\mathbb{P}^n$

$$H_i = \{x_i = 0\}$$

$$H_0 \cap \dots \cap H_n = \emptyset$$

$\Rightarrow \exists i \in \{0,\dots,n\}$ t.c. $\phi(X) \not\subset H_i$.

Per semplicità sia $i = 0$. $\qquad$ $\phi^{-1}(H_0)$ discreto in X

$\Rightarrow \phi(X) \cap U_0 \neq \emptyset$

$$\frac{x_i}{x_0} : \underset{\mathbb{C}^n}{\overset{}{U_0}} \to \mathbb{C} \quad \text{olomorfa} \quad i = 1,\dots,n$$

Sia $f_i := \underbrace{\frac{x_i}{x_0} \circ \phi}_{\text{olomorfa}} : X \setminus \phi^{-1}(H_0) \to \mathbb{C} \qquad i = 1,\dots,n$

$$f_0 \equiv 1.$$

$\rightsquigarrow \phi = (f_0 : f_1 : \dots : f_n)$ su $X \setminus \phi^{-1}(H_0)$

Verifichiamo che $f_1, \dots, f_n$ sono meromorfe.

Sia $p \in \phi^{-1}(H_0) \Rightarrow \phi(p)$ ha $x_0 = 0$

$\Rightarrow \exists j \in \{1, .., n\}$ t.c. $\phi(p)$ ha $x_j \neq 0$

Per semplicità sia $j = n$.

$\Rightarrow \phi(X) \not\subseteq H_n$

$\Rightarrow \exists g_0 .., g_{n-1}$ olomorfe in p t.c. localmente in p

$$\phi = (g_0 : \quad : g_{n-1} : 1)$$

Sia U intorno aperto di p t.c.

- g_i olomorfe in U
- $U \cap \phi^{-1}(H_0) = \{p\}$

$\Rightarrow$ in $U \setminus \{p\}$

$$\phi = (1 : f_1 : \quad : f_n) = (g_0 : \quad : g_{n-1} : 1)$$

$\Rightarrow \forall i = 1, .., n$ abbiamo

$$\begin{vmatrix} 1 & f_i \\ g_0 & g_i \end{vmatrix} \equiv 0 \quad \text{in } U \setminus \{p\}$$

$$\Rightarrow g_i - g_0 f_i = 0 \quad \text{in } U \setminus \{p\}$$

$$\Rightarrow f_i = \frac{g_i}{g_0} \quad \text{in } U \setminus \{p\}$$

g_0, g_i olomorfe in p

$\Rightarrow f_i$ è meromorfa in p. $\boxtimes$

GEOMETRIA SUPERIORE 23/5/2022

Esercizi da mandare: ①

es. B p.152, es. H ~~…~~, K p.167, es K p.193.

<u>Il sistema lineare associato a una mappa.</u>

X var. di R. e sia $\phi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ dominante

Associamo a ϕ un sistema lineare su X, ponendo:

$$\Lambda_\phi := \{ \phi^* H \mid H \text{ iperpiano di } \mathbb{P}^n \text{ che non contiene } \phi(X) \}.$$

- è chiaro che i divisori in Λ_ϕ sono tutti effettivi e linearmente equivalenti tra loro, ma: dobbiamo verificare che è un sistema lineare.

Def Dati dei divisori $D_1, \dots, D_r$, poniamo

$$\underbrace{\left(\min_{i=1,\dots,r} D_i\right)}_{\text{divisore su } X}(p) := \min_{i=1,\dots,r}\left(D_i(p)\right) \quad \forall p \in X$$

Lemma. Sia $\phi : X \to \mathbb{P}^n$ olomorfa, e (2)
H un iperpiano di $\mathbb{P}^n$ che non contiene $\phi(X)$, di equazione: $\sum_{i=0}^{n} a_i x_i = 0$

Sia $\phi = (f_0 : \dots : f_n)$ con $f_i \in \mathcal{M}(X)$ non tutte nulle.

Poniamo
$$D := - \min_{\substack{i=0,\dots,n \\ f_i \not\equiv 0}} \operatorname{div}(f_i)$$

Allora
$$\phi^* H = D + \operatorname{div}\Big(\underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i f_i}_{\in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}} \Big)$$

perché $H \not\supset \phi(X)$

Dim (cfr Lezione 11/5).
Sia $p \in X$ e sia $j \in \{0, \dots, n\}$ t.c. $\operatorname{ord}_p f_j$ sia minimo
$$\Rightarrow D(p) = - \operatorname{ord}_p f_j .$$

Inoltre: $\phi(p)$ ha $x_j \neq 0$.
$\Rightarrow$ possiamo usare x_j al denominatore per calcolare $(\phi^* H)(p)$

$$(\phi^* H)(p) = \operatorname{ord}_p \left(\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x_i}{x_j} \circ \phi \right) =$$
$$= \operatorname{ord}_p \left(\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i f_i}{f_j} \right)$$

$= \mathrm{ord}_p\left(\sum_{i=0}^{n} a_i f_i\right) - \mathrm{ord}_p f_j =$ ③

$= D(p) + \mathrm{ord}_p\left(\sum_{i=0}^{n} a_i f_i\right).$ $\underline{\underline{\text{ok}}}$

<u>Coroll.</u> Sia $\phi : X \to \mathbb{P}^n$ olomorfa.
Allora Q_ϕ è un sistema lineare

Più precisamente:
sia $\phi = (f_0 : \dots : f_n)$ $f_i \in \mathcal{M}(X)$ non tutte nulle

$$D = - \min_{i=0,\dots,n} \mathrm{div}(f_i)$$

Allora: $-D(p) \leq \mathrm{div}(f_i)(p)$ $\forall p \in X$ $\forall i = 0,\dots,n$

cioè: $\mathrm{div}(f_i) + D \geq 0$
$\forall i = 0,\dots,n.$

cioè: $f_i \in H^0(\mathcal{O}_X(D))$ $\forall i = 0,\dots,n$

Sia $V := \mathcal{L}(f_0,\dots,f_n) \subseteq H^0(\mathcal{O}_X(D))$

Allora: Q_ϕ corrisponde a
$\mathbb{P}(V) \subseteq |D|.$

$\boxed{\text{DIM.}}$
Sia H un iperpiano di $\mathbb{P}^n$ t.c.
$H \not\supset \phi(X)$ $\rightsquigarrow$ $\phi^* H \in Q_\phi.$ ev

Per il lemma: $\phi^* H = D + \mathrm{div}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i f_i\right)$
$\Rightarrow \phi^* H$ è in $\mathbb{P}(V)$
$\Rightarrow Q_\phi \subseteq \mathbb{P}(V).$

Viceversa: sia

$f \in V,\ f \not\equiv 0$

$[f] \in \mathbb{P}(V) \mapsto D + \mathrm{div}(f) \in |D|$

~~Ma~~ $f \in V \Rightarrow f = \sum_{i=0}^{n} a_i f_i$ con $a_i \in \mathbb{C}$

Se $H \subset \mathbb{P}^n$ è l'iperpiano dato da

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x_i = 0.$$

$f \not\equiv 0 \Rightarrow H \not\supset \phi(X)$

Dal lemma: $\phi^* H = D + \mathrm{div}(f)$

$\Rightarrow D + \mathrm{div}(f) \in Q_\phi$

$\Rightarrow \mathbb{P}(V) = Q_\phi$.

Proprietà di Q_ϕ.

<u>Note:</u> Data $\phi: X \to \mathbb{P}^n$, il sistema lineare Q_ϕ ha le proprietà

1) $\dim Q_\phi \leq n$, e
$\dim Q_\phi = n \Leftrightarrow \phi(X)$ non è contenuta in nessun iperpiano (non degenere)

(DIM.) $\phi = (f_0 : \dots : f_n)$

$V = \mathcal{L}(f_0, \dots, f_n)$ $\qquad Q_\phi = \mathbb{P}(V)$

$\rightsquigarrow \dim V \leq n+1$.

e: $\dim V = n+1 \Leftrightarrow f_0, \dots, f_n$ sono lin. indip. in $\mathcal{M}(X)$

$\Longrightarrow \phi(X)$ non è contenuto in nessun iperpiano.

2) Q_ϕ non ha punti base.

Dim. Sia $p \in X$. Sia $H \subset \mathbb{P}^n$ un iperpiano che non contiene $\phi(p)$

$\Rightarrow$ in particolare $H \not\supset \phi(X)$

$\Rightarrow \phi^* H \in Q_\phi$.

Supp $\phi^* H = \phi^{-1}(H) \not\ni p$

$\Rightarrow p$ non è un pto base.

3) Se componiamo $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ con una proiezione di $\mathbb{P}^n$, il sistema lineare Q_ϕ non cambia.

---

4) **Esercizio** ~~Sia $\phi: X \to \mathbb{P}^n$ olomorfa~~ ~~$(f_0 : \ldots : f_n)$~~ Siano:

$$\phi = (f_0 : \quad : f_n) : X \to \mathbb{P}^n$$

$$\psi = (g_0 : \quad : g_n) : X \to \mathbb{P}^n$$

con $f_i \in \mathcal{M}(X)$ non tutte nulle
$g_j \in \mathcal{M}(X)$ non tutte nulle

Allora $\phi = \psi \Longleftrightarrow \exists\, h \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ t.c.

$g_i = h \cdot f_i \quad \forall i = 0, \dots, n.$

---

4) Abbiamo visto che

$$Q_\phi = \mathbb{P}(V) \subset |D| \qquad V = \mathcal{L}(f_0, \dots, f_n) \subseteq H^0(\mathcal{O}(D))$$

$$\phi = (f_0 : \dots : f_n)$$

$$D = -\min_{i=0,\dots,n} \operatorname{div}(f_i).$$

Se cambiamo l'espressione di ϕ:

$$\phi = (g_0 : \dots : g_n)$$

Per l'esercizio $g_i = h \cdot f_i \quad \forall i = 0, \dots, n$, $h \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \operatorname{div}(g_i) = \operatorname{div}(h) + \operatorname{div}(f_i)$

$\Rightarrow \min_i \operatorname{div}(g_i) = \operatorname{div}(h) + \min_i \operatorname{div}(f_i)$

$\Rightarrow D' := -\min_i \operatorname{div}(g_i) = D - \operatorname{div}(h)$

$\Rightarrow D' \sim D, \qquad |D'| = |D|$

$$H^0(\mathcal{O}_X(D)) \cong H^0(\mathcal{O}_X(D'))$$

e l'isomorfismo è dato dalla moltiplicazione per h

$\rightsquigarrow$ porta f_i in g_i

$\rightsquigarrow$ porta $V = \mathcal{L}(f_0, \dots, f_n)$ in $V' = \mathcal{L}(g_0, \dots, g_n)$

Riassumendo abbiamo costruito un'applicazione: (+

$$\left\{\begin{array}{l}\phi : X \to \mathbb{P}^n \\ \text{olomorfa t.c.} \\ \phi(X) \text{ non è contenuta in} \\ \text{un iperpiano}\end{array}\right\}_{\text{composizione con proiettività di } \mathbb{P}^n} \xrightarrow{1:1} \left\{\begin{array}{l}\text{sistemi} \\ \text{lineari su } X \\ \text{senza pti base,} \\ \text{di dim. } n\end{array}\right\}$$

$$\phi \longmapsto Q_\phi$$

Mostriamo che questa è una corrispondenza biunivoca:

<u>Prop</u> Sia $Q \subset |D|$ un sistema lineare senza punti base, di dim. n. Allora $\exists\ \phi : X \to \mathbb{P}^n$ olomorfa t.c. $Q = Q_\phi$.] suriettività di $\to$

Inoltre ϕ è unica a meno di composizione con proiettività di $\mathbb{P}^n$.] iniettività di $\to$.

<u>Dim. Prop.</u> $Q = \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(D)))$

$\dim V = n+1$

Sia $f_0, .., f_n$ una base di V

e sia $\phi = (f_0 : \dots : f_n) : X \to \mathbb{P}^n$.

- ϕ olomorfa
- $\phi(X)$ non è contenuta in un iperpiano

- $Q = Q_\phi$.
- Sia $\phi' : X \to \mathbb{P}^n$ un'altra mappa con le stesse proprietà di ϕ.

$$\phi' = (g_0 : \dots : g_n)$$

con $g_0, \dots, g_n$ lin. indip.

Sia $D' := -\min \operatorname{div}(g_i)$ -

Allora:

$$Q = Q_{\phi'} = \{ D' + \operatorname{div}(\sum_{i=0}^{n} a_i g_i) \}.$$

$\forall i = 0, \dots, n$ sia $D_i := D + \operatorname{div}(f_i) \in Q$

$\Rightarrow \exists\ \tilde{g}_i \in \mathcal{L}(g_0, \dots, g_n)$ t.c.

$$D_i = D' + \operatorname{div}(\tilde{g}_i)$$

- $\tilde{g}_0, \dots, \tilde{g}_n$ sono linearm. indip.

$\Rightarrow$ a meno di comporre ϕ' con una proiettività, possiamo supporre che

$$\phi' = (\tilde{g}_0 : \dots : \tilde{g}_n)$$

ovvero, a meno di sostituire le $\tilde{g}_i$ alle g_i, possiamo supporre che

$$D + \operatorname{div}(f_i) = D' + \operatorname{div}(g_i) \quad \forall i$$

Consideriamo $h_i := \dfrac{f_i}{g_i}$. Allora

$$\operatorname{div}(h_i) = \operatorname{div}(f_i) - \operatorname{div}(g_i) = D' - D.$$