Oss Dati due divisori D_1, D_2 (14)
con cocicli $\{g_{0p}\}, \{h_{0,p}\}$

allora
$$g_{0p} \cdot h_{0p} = z_p^{D_1(p)} \cdot z_p^{D_2(p)} =$$
$$= z_p^{(D_1+D_2)(p)}$$
⇝ il prodotto è il cociclo di $D_1 + D_2$.
⇝ la mappa
$$\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*)$$
è anche omom. di gruppi.

Fatto: è un isomorfismo di gruppi.

⇝ per una superficie di Riemann otteniamo 4 gruppi isomorfi

$\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Div}(X)/\text{equiv lineare}$,

$H^1(X, \mathcal{O}^*)$, fibrati lin., fasci invertibili.

Es. $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ $\quad \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{Z}$ tramite il grado

$p = (0:1)$ $\quad (z_0 : z_1)$

$D = dp \quad d \in \mathbb{Z}$ divisore di grado d.

$U_0 = \{z_0 \neq 0\} = \mathbb{P}^1 \setminus \{p\}$

$D_{|U_0} = 0$

$U_1 = \{z_1 \neq 0\} \cong \mathbb{C}_z \quad z = \frac{z_0}{z_1}$ $\quad p \longleftrightarrow$ origine

$D_{|U_1} = \mathrm{div}(z^d)$

$$= \operatorname{div}\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^d$$

(15)

$\rightsquigarrow$ su U_{01} il cociclo con. a $\mathcal{O}(D)$ è

$$\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^d \in \mathcal{O}^*(U_{01})$$

1

Esercizi da rimandare:

es. I p. 153
es. A, C, D p. 330
es. J, N p. 344

} vedere su moodle x testo

<u>ES.</u> Fibrato tautologico su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$$

punti di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ rette vettoriali in $\mathbb{C}^2$

$\exists\ L \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ fibrato vett. di rk 1

t.c. $\forall p \in \mathbb{P}^1$ $L_p \subset \mathbb{C}^2$ è la retta vettoriale corrispondente a p.

$$L \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

$$\parallel$$

$$\{(v, p) \mid v \in L_p\}$$

Siano: x, y coord. su $\mathbb{C}^2$
$(s:t)$ " " $\mathbb{P}^1$

$L_p = \mathcal{L}(s, t)$ $\quad (x, y) \in L_p$

$\iff (x, y)$ e (s, t) sono proporzionali

$\iff \begin{vmatrix} x & y \\ s & t \end{vmatrix} = 0$ cioè $xt - ys = 0$.

equazione di L in $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}$

$\pi : L \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ proiezione da $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$ (2)

Esercizio Verificare che L è una varietà complessa di dim. 2.

π è banale

Sia $U := \{s \neq 0\} \subset \mathbb{P}^1$
$\quad \| $
$\mathbb{C}_{\frac{t}{s}} \qquad T = \frac{t}{s}$

$$\pi^{-1}(U) = L_U \subset \mathbb{C}^2 \times U = \mathbb{C}^3_{x,y,T}$$

In $\mathbb{C}^3$ l'equazione di L diventa:

$$xT - y = 0$$

$$y = xT \qquad \lambda \qquad (s,t)$$

$$\Rightarrow L_U \cong \mathbb{C}^2_{x,T} \cong \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_T$$

$$\downarrow \pi$$

$$U = \mathbb{C}_T$$

$\leadsto L$ è banale su U.

Sia $V := \{t \neq 0\} \subset \mathbb{P}^1$
$\quad \| $
$\mathbb{C}_{\frac{s}{t}} \qquad S = \frac{s}{t}$

$$L_V = \pi^{-1}(V) \subset \mathbb{C}^2 \times V = \mathbb{C}^3_{x,y,S}$$

l'equazione di L diventa: $x = yS$

$$\Rightarrow L_V \cong \mathbb{C}^2_{y,S} \cong \mathbb{C}_y \times \mathbb{C}_S$$

$$\downarrow \pi$$

$$V = \mathbb{C}_S.$$

$\Rightarrow L$ è un fibrato lineare olomorfo ③
su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ con ricoprimento minimale
$\{U, V\}$.

Scriviamo la transizione:

$$\begin{tikzcd}
 & \left(x=\lambda,\ y=\lambda\frac{t}{s},\ (s:t)\right) \in \pi^{-1}(U\cap V) \arrow[dl, "\phi_U", "\wr"'] \arrow[d] \arrow[dr, "\phi_V"', "\wr"] & \\
(U\cap V)\times\mathbb{C} \arrow[rr, bend right] & U\cap V & (U\cap V)\times\mathbb{C} \\
((s:t), \lambda) & & \left((s:t), \lambda\cdot\frac{t}{s}\right)
\end{tikzcd}$$

(y)

$\left(\frac{s}{t}\right)^{-1}$

$s\neq 0, t\neq 0$

$T = \frac{t}{s}$

$\Rightarrow g_{UV}(s:t) = \frac{t}{s}$ transizione

$U \longleftrightarrow U_0$
$V \longleftrightarrow U_1$

grado d: $f_{01} = \left(\frac{z_0}{z_1}\right)^d$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{L \text{ ha grado } -1}$

$\mathrm{Pic}\,\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{Z}$

$L \longleftrightarrow -1$

__OSS__ Sia X una superficie di Riemann compatta.

La mappa $\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^*$
$f(z) \longmapsto e^{2\pi i f(z)}$

è un morfismo di fasci suriettivo ④
con nucleo il fascio $\underline{\mathbb{Z}}$ delle
funzioni loc. costanti a valori in $\mathbb{Z}$.

⇝ abbiamo una succ. esatta corta
di fasci di gruppi abeliani su X:

$$0 \to \underline{\mathbb{Z}} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^* \to 0$$

SUCCESSIONE ESPONENZIALE

Consideriamo la succ. esatta lunga
in coom. associata:

$$0 \to \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\text{suriettiva}} \mathbb{C}^* \xrightarrow{0} H^1(X, \mathbb{Z})$$
$$z \mapsto e^{2\pi i z}$$

$$H^1(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{iniettiva}} H^1(X, \mathcal{O}_X) \to \cdots$$

⇝ ~~$0 \to H^1(X, \mathbb{Z})$~~

$$0 \to H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X) \to \underbrace{H^1(X, \mathcal{O}_X^*)}_{\mathrm{Pic}(X)} \xrightarrow{\deg} H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

• $H^2(X, \underline{\mathbb{Z}}) \cong H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ (coomologia singolare intera)

(perché: X è una superficie topologica compatta e orientabile

$$\left(H^2_{dR}(X) \cong H^2(X, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \right)$$

- Fatto: l'omomorfismo

$$\begin{array}{c} H^1(X, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \\ \| \\ \mathrm{Pic}(X) \end{array}$$

coincide con il grado $\deg : \mathrm{Pic}(X) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$

- $\mathrm{Pic}^0(X) := \ker \deg \subset \mathrm{Pic}(X)$

$\mathrm{Pic}^0(X) = \{0\} \iff X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

- dalle succ. esatte abbiamo, come gruppi

$$\begin{array}{c} \mathrm{Pic}^0(X) = \ker \deg \\ \| \\ \mathrm{Im}(H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)) \\ \cong \\ \dfrac{H^1(X, \mathcal{O}_X)}{\mathrm{Im}(H^1(X, \mathbb{Z}))} \end{array}$$

$\leftarrow$ spazio vett. complesso di dim. finita $\rightsquigarrow \mathbb{C}^r$

$\downarrow$ reticolo in $\mathbb{C}^r$

$\rightsquigarrow \mathrm{Pic}^0(X)$ è un toro complesso di dim. r.

Esercizio X sup. di R. cpta

Sia $\phi : \Omega^1(X) \to H^1_{dR}(X, \mathbb{C})$
$$\omega \mapsto [\omega]_d$$

1) Mostrare che ϕ è ben definita, iniettiva, e che $\operatorname{Im}\phi = H^{1,0}(X)$

2) Dedurre che $\forall \xi \in H^1_{dR}(X, \mathbb{C})$ $\exists!\ \omega, \eta \in \Omega^1(X)$ t.c.
$$\xi = [\omega + \bar{\eta}]_d .$$

Sistemi lineari su superfici di Riemann.

Sia X una sup. di Riemann cpta e D un divisore su X.

Def Il SISTEMA LINEARE COMPLETO associato a D è
$$|D| := \{ E \in \operatorname{Div}(X) \mid \underbrace{E \geq 0}_{\text{"effettivo"}} , E \sim D \}$$

- divisori linearmente equivalenti hanno lo stesso sistema lineare
- $\forall E \in |D|$, $|E| = |D|$
- $|D| = \emptyset$ se D non è lin. equiv. a divisori

effettivi (per esempio se $\deg D < 0$). (9)

<u>OSS</u> Abbiamo una corrispondenza biunivoca:

$$\mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}(D))) \longrightarrow |D|$$
$$[f] \longmapsto D + \mathrm{div}(f)$$

- è ben definita: • $\mathrm{div}(\lambda f) = \mathrm{div}(f)$ $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

  • $D + \mathrm{div}(f) \geq 0$ $\Rightarrow$ è in $|D|$.

- è iniettiva:
  se $f, g \in H^0(X, \mathcal{O}(D)) \setminus \{0\}$ sono t.c.
  $$D + \mathrm{div}(f) = D + \mathrm{div}(g)$$
  $\Rightarrow \mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(g) \Rightarrow \mathrm{div}\left(\frac{f}{g}\right) = 0$

  $\Rightarrow \frac{f}{g}$ è olomorfa e mai nulla su X compatta

  $\Rightarrow \frac{f}{g}$ è costante in $\lambda \Rightarrow f = \lambda g$

  $\Rightarrow [f] = [g]$ in $\mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}(D)))$.

- è suriettiva: se $E \in |D|$
  $\Rightarrow E \sim D$ cioè $E = D + \mathrm{div}(f)$ con $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$
  inoltre $E \geq 0$ cioè $f \in H^0(\mathcal{O}(D))$

ma il sistema lineare completo (10)
$|D|$ ha una struttura naturale di spazio proiettivo.

<u>Def.</u> Un SISTEMA LINEARE Q è un sottoinsieme di un sistema lineare completo $|D|$ che corrisponde a un sottospazio proiettivo:

$$Q = \mathbb{P}(V) \quad \text{con } V \subseteq H^0(X, \mathcal{O}(D))$$

modulo la bigezione

sottospazio vettoriale

(cioè $Q = \{D + \operatorname{div}(f) \mid f \in V \setminus \{0\}\}$)

- Q ha un GRADO $= \deg D$ (= grado dei divisori in Q)
  e una dimensione $= \dim V - 1$.

Q è un FASCIO se è un sistema lineare di dim. 1.

<u>Def.</u> Dato Q sistema lineare e $p \in X$, diciamo che p è un PUNTO BASE per Q se $p \in \operatorname{Supp} E$ $\forall E \in Q$.

Se $Q = \mathbb{P}(V)$ $\quad V \subseteq H^0(X, \mathcal{O}(D))$

~~allora~~:

p è un punto base per Q dim. per esercizio $\Longleftrightarrow$ $V \subseteq H^0(X, \mathcal{O}(D-p))$