Riassumendo abbiamo costruito un'applicazione: (+

$$\left\{\begin{array}{l} \phi: X \to \mathbb{P}^n \\ \text{olomorfa t.c.} \\ \phi(X) \text{ non è contenuto in} \\ \text{un iperpiano} \end{array}\right\} \Big/ \begin{array}{l}\text{composizione} \\ \text{con proiettività} \\ \text{di } \mathbb{P}^n\end{array} \xrightarrow{1:1} \left\{\begin{array}{l} \text{sistemi} \\ \text{lineari su } X, \\ \text{senza pti} \\ \text{base,} \\ \text{di dim. } n \end{array}\right\}$$

$$\phi \longmapsto Q_\phi$$

Mostriamo che questa è una corrispondenza biunivoca:

Prop Sia $Q \subset |D|$ un sistema lineare senza punti base, di dim. n. Allora $\exists\ \phi: X \to \mathbb{P}^n$ olomorfa t.c. $Q = Q_\phi$.] suriettività di →

Inoltre ϕ è unica a meno di composizione con proiettività di $\mathbb{P}^n$.] iniettività di →.

Dim. Prop. $Q = \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(D)))$

$\dim V = n+1$

Sia $f_0, \dots, f_n$ una base di V e sia $\phi = (f_0 : \dots : f_n): X \to \mathbb{P}^n$.

- ϕ olomorfa
- $\phi(X)$ non è contenuto in un iperpiano

· $Q = Q_\phi$.

· Sia $\phi' : X \to \mathbb{P}^n$ un'altra mappa con le stesse proprietà di ϕ.

$$\phi' = (g_0 : \dots : g_n)$$

con $g_0, \dots, g_n$ lin. indip.

Sia $D' := -\min \mathrm{div}(g_i)$ -

Allora:

$$Q = Q_{\phi'} = \{D' + \mathrm{div}(\sum_{i=0}^{n} a_i g_i)\}.$$

$\forall i = 0, \dots, n$ sia $D_i := D + \mathrm{div}(f_i) \in Q$

$\Rightarrow \exists\ \tilde{g}_i \in \mathcal{L}(g_0 \dots g_n)$ t.c.

$$D_i = D' + \mathrm{div}(\tilde{g}_i)$$

· $\tilde{g}_0, \dots, \tilde{g}_n$ sono linearm. indip.

$\Rightarrow$ a meno di comporre ϕ' con una proiettività, possiamo supporre che

$$\phi' = (\tilde{g}_0 : \dots : \tilde{g}_n)$$

ovvero, a meno di sostituire le $\tilde{g}_i$ alle g_i, possiamo supporre che

$$D + \mathrm{div}(f_i) = D' + \mathrm{div}(g_i) \quad \forall i$$

Consideriamo $\boxed{h_i := \frac{f_i}{g_i}}$. Allora

$$\mathrm{div}(h_i) = \mathrm{div}(f_i) - \mathrm{div}(g_i) = D' - D.$$

$\Rightarrow \operatorname{div}\left(\frac{h_i}{h_0}\right) = 0 \quad \forall i$

$\Rightarrow \frac{h_i}{h_0}$ è olomorfa su $X \Rightarrow$ è costant

$\Rightarrow \forall i \quad h_i = \lambda_i \cdot h_0 \quad \lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$

$\rightsquigarrow \quad f_i = h_0 \cdot (\lambda_i g_i). \quad h_0 \in \mathcal{M}(X) \setminus$

- A meno di comporre ϕ' con un'altra proiettività, possiamo sostituire ~~λf_i e f_i~~ f_i e $\lambda_i f_i$

$\Rightarrow f_i = h_0 \cdot f_i \quad \forall i$

$\Rightarrow \phi = (f_0 : \; : f_n) = (g_0 : \; : g_n) = \phi'.$

ES. Sia $\phi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ data da

$$\phi(x_0 : x_1) = (x_0^3 : x_0 x_1^2 : x_1^3).$$

Dividiamo per x_1^3:

$$\phi = \Big(\underbrace{\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^3 : \frac{x_0}{x_1} : 1}_{\in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)}\Big) \qquad \begin{matrix} p = (1:0) \\ q = (0:1) \end{matrix}$$

$$= (f_0 : f_1 : f_2)$$

$\operatorname{div}(1) = 0 \qquad \operatorname{div}\left(\frac{x_0}{x_1}\right) = q - p$

$\operatorname{div}\left(\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^3\right) = 3q - 3p$

$$\min_{i=0,1,2} \operatorname{div}(f_i) = -3p$$

$$D = 3p$$

⇝ la mappa ϕ è associata a un sistema lineare Q_ϕ di grado 3

$$|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)| = \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1]_3)$$

$$Q_\phi = \mathbb{P}(\mathcal{L}(x_0^3, x_0 x_1^2, x_1^3))$$

$$\dim Q = 2.$$

Nota: $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)|$ dà l'immersione $\mathbb{P}^1 \xhookrightarrow{\nu} \mathbb{P}^3$ come cubica gobba.

ϕ è la composizione di $\mathbb{P}^1 \xrightarrow{\nu} \mathbb{P}^3$ con la proiezione $\mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ da $(0:1:0:0)$.

OSS Se D è un divisore senza punti base (cioè il sistema lineare completo $|D|$ non ha punti base), la mappa

$$\phi_D : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

che avevamo costruito e studiato è la mappa associata al sistema lineare completo $|D|$.

<u>OSS</u> Dato un sistema lineare qualsiasi $Q \subseteq |D|$

Sia $F := \min\{E \mid E \in Q\}$.

⇝ ogni $E \in Q$ si scrive come

$$E = \underbrace{F}_{\text{fisso}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{effettivo, dipende} \\ \text{da } E}}{E'}$$

⇝ F è il più grande divisore che compare in ogni $E \in Q$, è fatto solo di punti base, e si dice PARTE FISSA del sistema lineare Q.

($F = \emptyset$ sse Q non ha punti base).

Sia $Q' := \{E'\} = \{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{varia}}}{E} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fisso}}}{F} \mid E \in Q\}$

· $E - F \sim D - F$

⇝ $Q' \subseteq |D - F|$ è ancora un sistema lineare, associato allo <u>stesso</u> spazio vettoriale

$$V \subseteq H^0(\mathcal{O}_X(D-F)) \subseteq H^0(\mathcal{O}_X(D))$$

· Q' è senza punti base ed è detto PARTE MOBILE di Q.

Data $f_1, \dots, f_n$ base di V

$$\phi = (f_1 : \dots : f_n) : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

$$Q' = Q_\phi .$$

<u>ES.</u> $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ $\qquad p_0 = (1:0)$

Sia

$$Q := \{ p_0 + p + q \mid p, q \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \} \subseteq |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)| = \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1]_3)$$

- Q è un sistema lineare

$$\longleftrightarrow \mathcal{L}(x_0 x_1^2, x_0^2 x_1, x_1^3)$$

- la parte fissa di Q è $F = p_0$

$$Q' = \{ p + q \mid p, q \in \mathbb{P}^1 \} = |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)|$$

$$\phi_{Q'} : \mathbb{P}^1 \hookrightarrow C = \mathbb{P}^2$$

conica liscia

$$(x_0 : x_1) \longmapsto (x_0 x_1^2 : x_0^2 x_1 : x_1^3)$$

$$= (x_0 x_1 : x_0^2 : x_1^2)$$

<u>OSS</u> Sia $Q \subseteq |D|$ un sistema lineare senza punti base.

Sia $\dim Q = n$

$\dim |D| = m \geq n$

- Anche $|D|$ è senza punti base

$\Rightarrow$ abbiamo due mappe:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{P}^n \\
X \arrow[ur, "\Phi_Q"] \arrow[dr, "\Phi_{|D|}"'] & \\
 & \mathbb{P}^m
\end{tikzcd}$$

che relazione c'è:
differiscono per una proiezione

Infatti: sia $Q = \mathbb{P}(V)$
$V \subseteq H^0(O(D))$

Sia $f_0, .., f_n$ base di V
e la completiamo a $f_0, .., f_m$ base di $H^0(O($

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{P}^n & \\
X \arrow[ur, "\Phi_Q"] \arrow[ddr, "\Phi_{|D|}"'] & (f_0(p): \quad : f_n(p)) & (x_0: \quad : x_n) \\
p \arrow[ur, mapsto] & & \\
 & \mathbb{P}^m & (x_0: \quad : x_m) \arrow[uu, mapsto, "\text{proie}"'] \\
 & (f_0(p): \quad : f_m(p)) \arrow[uuu, squiggly] & (m \geq
\end{tikzcd}$$

Oss Data $X \subset \mathbb{P}^n$ sup. di Riemann immersa in $\mathbb{P}^n$

$i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$

determina un sistema lineare su X

$$Q_i := \{ H_{|X} \mid H \text{ iperpiano in } \mathbb{P}^n \text{ che non contiene } X \}$$

- Q_i è un sistema lineare senza punti base, di dim. $\leq n$, di grado $= \deg X$.

Prop Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ sup. di Riemann sottovarietà complessa di $\mathbb{P}^n$.
Se X non è contenuta in un iperpiano, allora $\deg(X) \geq n$.

DIM Sia $D := H_{|X}$, H iperpiano.
e consideriamo il sistema lineare

$$Q_i \subseteq |D|$$

X non è contenuta in un iperpiano

$$\Rightarrow \dim Q_i = n$$

$$\Rightarrow \dim |D| \geq n$$

$\Rightarrow h^0(\mathcal{O}_X(D)) \geq n+1.$

Avevamo visto che:

$\forall D = P - N$ $\quad$ P, N effettivi

si ha che: $\quad$ a supporto disgiunt

$$h^0(\mathcal{O}_X(D)) \leq 1 + \deg P.$$

Nel nostro caso: $D \geq 0 \Rightarrow D = P, N =$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow h^0(\mathcal{O}_X(D)) \leq 1 + \deg D & \\ \qquad\quad \vee & \\ \qquad\quad 1+m & \Rightarrow \deg D \geq m \\ & \qquad \| \\ & \quad \deg H.X \\ & \qquad \| \\ & \quad \deg X. \end{array}$$

Coroll. Se $X \subset \mathbb{P}^n$ ha grado 1, allora è una retta.

Se $X \subset \mathbb{P}^n$ ha grado $< n$, allora X è contenuta in un iperpiano.

Prop (curve di grado minimo).

Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ una sup. di R. cpta, sottovarietà complessa, non contenuta in un iperpiano.

Se X ha grado minimo m, allora X è una curva razionale normale, cioè $X \cong \mathbb{P}^1$ immersa con il sistema lineare completo $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)|$.

DIM. (classificazione curve di grado minimo)

$X \subset \mathbb{P}^n$ di grado n,
non contenuta in un iperpiano

Sia $D := H_{|X}$ H iperpiano

$\Rightarrow \deg D = \deg X = n$

e come nella dim. del bound sul grado, vediamo che $h^0(\mathcal{O}_X(D)) = n+1$

D effettivo $\Rightarrow D = p_1 + \dots + p_n$, $p_i \in X$

$$\underbrace{\overset{\mathbb{C}}{H^0(\mathcal{O}_X)}}_{\dim 1} \subseteq H^0(\mathcal{O}_X(p_1)) \subseteq H^0(\mathcal{O}_X(p_1+p_2)) \quad \Big\} \, n \text{ passi}$$

$$\subseteq \dots \subseteq \underbrace{H^0(\mathcal{O}_X(D))}_{\dim n+1}$$

- ad ogni passo la dimensione aumenta al più di 1
- ci sono n passi e la dimensione aumenta globalmente di n

$\Rightarrow$ deve aumentare di 1 ad ogni passo

$\Rightarrow \dim H^0(\mathcal{O}_X(p_1)) = 2$

Se $f \in H^0(\mathcal{O}_X(p_1))$ è non costante, $\mathbb{C}$ f definisce $F : X \to \mathbb{C}_\infty$ di grado 1

$\Rightarrow X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $D = H_{|X}$ grado n

$D \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)|$

$h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)) = n+1$

$\Rightarrow \dim |D| = \dim |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)| = n$

$\Rightarrow$ il sistema lineare $Q_i \subseteq |D|$ deve essere il sistema lineare completo $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)|$.

Richiamo:

X sup. Riemann cpta, $p \in X$

$$\Rightarrow h^0(\mathcal{O}_X(p)) = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

$h^0(\mathcal{O}_X(p)) = 2 \iff X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

$\rightsquigarrow h^0(\mathcal{O}_X(p))$ è costante al variare di $p \in X$.

Superfici di Riemann iperellittiche.

Sia $h \in \mathbb{C}[x]$ con tutte radici distinte e sia $2g+1+\varepsilon$ il suo grado

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$p+q \in |D|$

⇝ i punti base potrebbero essere solo p o q

$$\begin{tikzcd} H^0(\mathcal{O}(D-p)) \arrow[d, equal] \arrow[r, phantom, "\subset"] & \underbrace{H^0(\mathcal{O}(D))}_{\text{dim. 2}} \\ \underbrace{H^0(\mathcal{O}(q))}_{\text{ha sempre dim. 1 se } g>0} & \end{tikzcd}$$

⇒ p non è un punto base (e lo stesso per q).

⇒ $\phi_D : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ (definita da $|D| \cong \mathbb{P}^1$)

e $\deg \phi_D = \deg D = 2$.

OSS (sistema lineare canonico).

Sia X una sup. di R. cpta con $g \geq 1$. Allora K_X è senza punti base. Infatti, se $p \in X$: dobbiamo verificare che

$$H^0(\mathcal{O}_X(K_X-p)) \subsetneq \underbrace{H^0(\mathcal{O}_X(K_X))}_{\dim = g}$$

Da R.R:

$$h^0(\mathcal{O}_X(K_X-p)) = h^1(\mathcal{O}_X(K-p)) + \deg(K-p) + 1 - g$$

$$= \underbrace{h^0(\mathcal{O}_X(p))}_{\overset{\|}{1}} + \underbrace{2g-3+1-g}_{g-2} = g-1 \quad \boxed{\text{ok}}$$

perché $g>0$

⊛ Superfici di Riemann di genere 2

Se $g=2$: · K_X è senza punti base

· ha grado $2g-2=2$

· $h^0(\mathcal{O}_X(K_X)) = g = 2$

$\Rightarrow \dim|K_X| = 1$

$\Rightarrow \varphi_K : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ e ha grado 2.

$\Rightarrow$ X è sempre iperellittica

Mappa canonica ⊛

Sia $g \geq 2$: allora K_X è senza punti base $\Rightarrow$ definisce una mappa, detta MAPPA CANONICA

$$\varphi_K : X \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}.$$

· Per $g=2$: φ_K ha grado 2.

· ~~Mostriamo che~~ Vediamo cosa succede per $g \geq 3$.

Ricordiamo che:

ϕ_K è un embedding $\Longleftrightarrow$ K_X è "molto ampio" $\Longleftrightarrow$ $\forall p, q \in X$

$$h^0(\mathcal{O}_X(K_X-p-q)) = h^0(\mathcal{O}_X(K_X))-$$

Se $p, q \in X$ sono t.c.

$$h^0(\mathcal{O}_X(K_X-p-q)) \neq \overset{g-2}{h^0(\mathcal{O}_X(K_X))-2}$$

$$\underbrace{H^0(\mathcal{O}_X(K_X-p-q))}_{\dim} \subseteq \underbrace{H^0(\mathcal{O}_X(K_X-p))}_{\dim g-1} \subsetneq \underbrace{H^0(\mathcal{O}_X(K_X))}_{\dim g}$$

$g-1$ $\quad$ $g-2$

---

avremo che: $h^0(\mathcal{O}_X(K_X-p-q)) = g-1$

$\parallel$ R.R.

$$h^1(\mathcal{O}_X(K_X-p-q)) + 2g-2-2+1-g$$

$\parallel$ Serre

$$h^0(\mathcal{O}_X(p+q)) + g-3$$

cioè: $\boxed{H^0(\mathcal{O}_X(p+q)) \text{ ha dim. } 2}$

Sia $f \in H^0(\mathcal{O}_X(p+q))$ non costante.

Siccome $g > 0$, abbiamo

$$H^0(\mathcal{O}_X(p)) = H^0(\mathcal{O}_X(q)) = H^0(\mathcal{O}_X) = \mathbb{C}$$

costanti

$\Rightarrow f \notin H^0(\mathcal{O}_X(p))$

$f \notin H^0(\mathcal{O}_X(q))$

$\Rightarrow f$ ha due 1-poli, in p e in q.

$\Rightarrow f$ induce una $F : X \to \mathbb{C}_\infty$ di grado 2

$$(F^*(\infty) = p + q).$$

$\Rightarrow X$ è iperellittica.

In effetti si ha equivalenza:

1) $h^0(\mathcal{O}_X(K_X - p - q)) \neq h^0(\mathcal{O}_X(K_X)) - 2$

$\Longleftrightarrow$ X è iperellittica e $p+q$ è una fibra di $F : X \to \mathbb{P}^1$ di grado 2.

2) Se $g \geq 3$, Φ_K è un embedding

$\Longleftrightarrow$ X non è iperellittica.

Nota: se $g \geq 3$ la "maggior parte" delle superfici di R. di genere g non è iperellittica, e

$$\phi_K : X \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$$

$\phi_x(X)$ ha grado $2g-2$.

"Moduli" = parametri (per la struttura complessa) (fissata la struttura topologica).

Fissiamo g genere $g > 0$

Fatto: esiste una varietà quasi-proiettiva complessa M_g i cui punti sono in corr. biunivoca con:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{superfici di Riemann} \\ \text{cpte di genere } g \end{array} \right\} \Big/ \text{isom.}$$

M_g = SPAZIO DEI MODULI DELLE CURVE PROIETTIVE COMPLESSE LISCE DI GENERE g

(M_g non è compatto).

Fissato $g \geq 3$:

$$\mathcal{H}_g \subset \mathcal{M}_g$$

$\downarrow$
sottoinsieme delle curve iperellittiche

$\mathcal{H}_g$ è una sottovarietà

$\underbrace{\mathcal{H}_g}_{\text{dim. } 2g-1}$, $\underbrace{\mathcal{M}_g}_{\text{dim.} = 3g-3}$ sono irriducibili

$$2g-1 < 3g-3$$

$$g > 2.$$

$\rightsquigarrow$ per tutte le sup. di R. in $\mathcal{M}_g \setminus \mathcal{H}_g$ (aperto denso)

la mappa canonica è un embedding (per la ~~generica~~ sup. di Riemann generale di genere g).