GEOMETRIA SUPERIORE 13/5/2022

Esercizi dal Miranda:

①

ES. H, J p. 137

ES. D, F p. 145

ES. D p. 166

ES. C, D, E p. 111

ES. I p. 193

Mercoledì prossimo: discussione esercizi.

X varietà complessa di dim. n

$T^*_{\mathbb{C}}X$ cotang. complessificato

$$\bigwedge^k T^*_{\mathbb{C}} X = \bigoplus_{p+q=k} \left(\boxed{\bigwedge^p (T^{1,0})^* \otimes \bigwedge^q (T \ldots} \right.$$

$U \subseteq X$ aperto con coord. locali $t_1, \ldots, t_n$

$\forall p \in U$ $\quad dt_1, \ldots, dt_n$ base del cotang. dom.

$d\bar{t}_1, \ldots, d\bar{t}_n$ base del cotang. antiolom.

Le forme di tipo (p,q) ($\mathcal{C}^\infty$, complesse) sono le sezioni $\mathcal{C}^\infty$ di $\boxed{}$ e si scrivono localmente come

$$\sum_{|I|=p,\, |J|=q} f_{I,J}\, dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_q}$$

$\rightsquigarrow A^{p,q}$ fascio delle forme di tipo (p,q)

$$A^k = \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q}$$

Nota: $A^{p,q} = 0$ se $p > n$ o $q > n$.

<u>Es</u> Se $n=1$ abbiamo:

0-forme = funzioni, sono tutte di tipo $(0,0)$

1-forme: localm. $f(z)\,dz$ tipo $(1,0)$

$g(z)\,d\bar{z}$ tipo $(0,1)$

f, g $\mathcal{C}^\infty$

2-forme: sono tutte di tipo $(1,1)$

$$f(z)\, dz \wedge d\bar{z}$$

<u>OSS</u> Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

Si ha:

$$df = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i}_{\text{parte }(1,0)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i}_{\text{parte }(0,1)}$$

Verificare per esercizio!

Definiamo: $\partial f :=$ parte $(1,0)$ di df

$\bar{\partial} f :=$ parte $(0,1)$ di df

$\Rightarrow$ ∂f è di tipo $(1,0)$
$\bar\partial f$ " " " $(0,1)$
in coord. locali:

$$\partial f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_i$$

$$\bar\partial f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar z_i} d\bar z_i.$$

Allo stesso modo, data una k-forma

$$\omega = \sum_{\substack{I,J \\ |I|+|J|=k}} f_{I,J}\, dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_p} \wedge d\bar z_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar z_{j_q}$$

si ha:

$$d\omega = \sum_{r=1}^{n} \sum_{I,J} \left(\frac{\partial f_{I,J}}{\partial t_r} dt_r \wedge dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar z_{j_q} + \frac{\partial f_{I,J}}{\partial \bar z_r} d\bar z_r \wedge dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar z_{j_q} \right)$$

Definiamo, localmente:

$$\partial\omega = \sum_{r=1}^{n} \sum_{I,J} \frac{\partial f_{I,J}}{\partial t_r} dt_r \wedge dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar z_{j_q}$$

$$\bar\partial\omega = \sum_{r=1}^{n} \sum_{I,J} \frac{\partial f_{I,J}}{\partial \bar z_r} d\bar z_r \wedge dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar z_{j_q}.$$

- la definizione non dipende dalle coordinate locali, infatti:

$$\omega = \sum_{p+q=k} \omega_{p,q} \qquad (\omega \text{ k-forma})$$

$$\Rightarrow d\omega = \sum_{p+q=k} d\omega_{p,q}$$

$$d\omega_{p,q} = \underbrace{\partial \omega_{p,q}}_{\text{tipo } (p+1,q)} + \underbrace{\bar\partial \omega_{p,q}}_{\text{tipo } (p,q+1)}$$

$\rightsquigarrow$ $\partial\omega_{p,q}$, $\bar\partial\omega_{p,q}$ non dipendono dalle coordinate locali

$\rightsquigarrow$ $\partial\omega = \sum_{p+q=k} \partial\omega_{p,q}$
$\bar\partial\omega = \sum_{p+p=k} \bar\partial\omega_{p,q}$ non dipendono dalle coord locali.

$\rightsquigarrow$ abbiamo definito due operatori $\mathbb{C}$-lineari

$$\partial, \bar\partial : A^k_{\mathbb{C}} \to A^{k+1}_{\mathbb{C}}$$

t.c.:
- $d = \partial + \bar\partial$
- $\partial A^{p,q} \subseteq A^{p+1,q}$
- $\bar\partial A^{p,q} \subseteq A^{p,q+1}$

OSS $\partial^2 = \bar\partial^2 = 0, \quad \partial\bar\partial = -\bar\partial\partial$

DIM $d = \partial + \bar\partial \quad , \quad d^2 = 0$

$$d^2 = (\partial + \bar\partial)\circ(\partial + \bar\partial) = \partial^2 + \partial\bar\partial + \bar\partial\partial + \bar\partial^2$$

Se ω è una forma di tipo (p,q):

$$0 = d^2\omega = \underbrace{\partial^2\omega}_{\text{tipo }(p+2,q)} + \underbrace{\partial\bar\partial\omega + \bar\partial\partial\omega}_{\text{tipo }(p+1,q+1)} + \underbrace{\bar\partial^2\omega}_{\text{tipo }(p,q+2)}$$

$\Rightarrow \partial^2\omega = 0 \quad , \quad \bar\partial^2\omega = 0 \quad , \quad \partial\bar\partial\omega = -\bar\partial\partial\omega$

$\Rightarrow$ per linearità le 3 uguaglianze valgono su tutte le k-forme.

ES Se $n=1$: localmente

$$df = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}dz}_{\partial f} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar z}d\bar z}_{\bar\partial f}$$

se $\omega = g(z)\,dz + h(z)\,d\bar z$

$$\partial\omega = \frac{\partial h}{\partial z}dz\wedge d\bar z$$

$$\bar\partial\omega = -\frac{\partial g}{\partial \bar z}dz\wedge d\bar z$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial \bar z}\right)dz\wedge d\bar z$$

$$\partial\bar\partial f = \partial\left(\frac{\partial f}{\partial \bar z}\, d\bar z\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial \bar z}\, dz\wedge d\bar z$$

e
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial\bar z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac12\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) =$$

$$= \frac14\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + i \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}} - i\cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$= \frac14 \Delta f$$

$$\Rightarrow \partial\bar\partial f = \frac14 (\Delta f)\cdot dz\wedge d\bar z$$

FORME OLOMORFE

Def Una k-forma olomorfa ω su X è una sezione olomorfa di $\bigwedge^k \underbrace{\mathcal{T}_X^*}_{\text{cotang. olomorfo}}$

~> Localmente

$$\omega = \sum_I f_I\, dz_{i_1}\wedge\dots\wedge dz_{i_k}$$

con f_I olomorfe.

• Le k-forme olomorfe sono sempre di tipo $(k,0)$

Come se

- le k-forme olomorfe e le forme di tipo $(k,0)$ sono sezioni dello stesso fibrato vett. $\Lambda^k(T^{1,0})^*$ ma olomorfe / C^∞.

Ω^p_X fascio delle p-forme olomorfe

$\Omega^p_X \subset A^{p,0}$ $(p = 0, \dots, n)$

<u>OSS</u> Sia $f \in C^\infty(U)$. Allora

$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \iff$ f soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann

ES.

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

$\bar{\partial} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i = 0$ come 1-forme. $\qquad$ f olomorfa

$\rightsquigarrow$ per ogni aperto A di X $\forall f \in C^\infty(A)$ si ha:

f è olomorfa $\iff \bar{\partial} f = 0$ come 1-forme su A

$\Rightarrow \mathcal{O}(A) = \ker(\bar{\partial} : C^\infty(A) \to A^{0,1}(A))$

Più in generale data una forma ω di $\Lambda_{\mathbb{C}}(p,0)$:

localmente $\omega = \sum_I f_I \, dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_p}$

ω è olomorfa $\Leftrightarrow$ f_I è olomorfa $\forall i$

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial f_I}{\partial \bar{z}_j} = 0 \quad \forall I, j \Leftrightarrow \bar{\partial}\omega \underset{(p+1)}{=} 0$ come forma

$\leadsto \Omega^p = \mathrm{Ker}\left(\bar{\partial} : A^{p,0} \longrightarrow A^{p,1}\right)$.

- Se X è compatta: si può vedere che tutti gli spazi vettoriali complessi $H^q(X, \Omega^p_X)$ hanno dim. finita e

$$h^{p,q}(X) := \dim_{\mathbb{C}} H^q(X, \Omega^p_X)$$

(NUMERI DI HODGE di X).

ES. Se $n=1$:

$$h^{0,0}(X) = \dim \overbrace{H^0(X, \mathcal{O}_X)}^{\mathbb{C}} = 1$$

$$h^{1,0}(X) = \dim \underbrace{H^0(X, \Omega^1_X)}_{\Omega^1(X)} = g_{top}$$

$$h^{0,1}(X) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = g_{top}(\text{g}$$

$$h^{1,1}(X) = \dim \underbrace{H^1(X, \Omega^1_X)}_{\substack{\cong \\ H^1(X, \mathcal{O}(K_X)) \\ \cong \\ H^0(X, \mathcal{O}_X) \\ \cong \\ \mathbb{C}}} = 1.$$

<u>Def</u> Sia X una varietà complessa, ω una k-forma su X.

- ω è $\bar\partial$-chiusa se $\bar\partial\omega = 0$
- ω è $\bar\partial$-esatta se $\exists\, \eta$ $(k-1)$-forma t.c. $\omega = \bar\partial\eta$ (se ω è di tipo (p,q), η deve essere $(p,q-1)$)

$\bar\partial^2 = 0 \Longrightarrow$ ogni forma $\bar\partial$-esatta è anche $\bar\partial$-chiusa.

Si definisce il k-esimo gruppo di coomologia di DOLBEAULT di X, per le forme di tipo (p,q), il gruppo

$$H^{p,q}_{\bar\partial}(X)$$

$$\text{spazio vett. su } \mathbb{C} \leftarrow \quad \overset{\shortparallel}{\frac{\{(p,q)\text{-forme } \bar\partial\text{-chiuse su } X\}}{\{(p,q)\text{-forme } \bar\partial\text{-esatte su } X\}}}$$

<u>Oss</u> Se <u>$q=0$</u>:

$\{(p,0)$-forme $\bar\partial$-chiuse su $X\} = \Omega^p(X)$

. l'unica forma $\bar\partial$ esatta è quella nulla

$$\Rightarrow H^{p,0}_{\bar\partial}(X) = \Omega^p(X).$$

$$H^{0,0}_{\bar\partial}(X) = \mathcal{O}(X)$$

Oss. che abbiamo una successione di fasci su X:

$$0 \to \underset{\substack{\uparrow \\ \text{esatto}}}{\Omega^p_X} \hookrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{esatto}}}{\mathcal{A}^{p,0}_X} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}^{p,1} \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}^{p,n} \longrightarrow 0$$

~~Nei~~ Nei termini $\mathcal{A}^{p,q}$ abbiamo

$$\bar\partial^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}\bar\partial \subseteq \ker\bar\partial$$

Vogliamo verificare che la successione è esatta, e cioè che si ha uguaglianza di fasci $\operatorname{Im}\bar\partial = \ker\bar\partial$.

Per questo serve l'analogo del Lemma di Poincaré:

11

$\bar\partial$-Poincaré lemma (lemma di Dolbeault).

Sia $B \subset \mathbb{C}^n$ un polidisco aperto:

$w = (w_1, .., w_n) \in \mathbb{C}^n$ $\quad \varepsilon = (\varepsilon_1, .., \varepsilon_n) \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i > 0$

$$B := \{ z \in \mathbb{C}^n \mid |z_i - w_i| < \varepsilon_i \ \forall i = 1, .., n \}$$

Sia $\omega \in A^{p,q}(B)$ $\bar\partial$-chiusa, con $q > 0$.

Allora $\exists\, \eta \in A^{p,q-1}(B)$ t.c.

$$\omega = \bar\partial \eta .$$

- Lo dimostreremo solo per $n = 1$.

Esplicitiamo il significato per $n = 1$:

$$q = 1 \qquad p = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \qquad \omega \begin{cases} (0,1) \\ (1,1) \end{cases}$$

Se ω è $(0,1)$:

$$\omega = f(z)\, d\bar z \qquad f \in C^\infty(B)$$

B = disco aperto in $\mathbb{C}$

- ω è sempre $\bar\partial$-chiusa

Vogliamo $\eta \in C^\infty(B)$ t.c. $\omega = \bar\partial \eta = \frac{\partial \eta}{\partial \bar z} d\bar z$

data f

$\rightsquigarrow$ vogliamo η t.c.

$$f = \frac{\partial \eta}{\partial \bar z}$$

Se ω è $(1,1)$:

$$\omega = g(z)\, dz \wedge d\bar{z}$$

ω è sempre $\bar{\partial}$-chiusa

Vogliamo η di tipo $(1,0)$ t.c. $\omega = \bar{\partial}\eta$

$$\eta = h(z)\, dz$$

$$h \in C^\infty(B)$$

$$\bar{\partial}\eta = \frac{\partial h}{\partial \bar{z}}\, d\bar{z} \wedge dz = -\frac{\partial h}{\partial \bar{z}}\, dz \wedge d\bar{z}$$

$\rightsquigarrow$ di nuovo: data g, vogliamo h t.c.

$$g = -\frac{\partial h}{\partial \bar{z}}$$

Usando il lemma di $\bar{\partial}$-Poincaré, vediamo che:

su X varietà complessa

se $A \subseteq X$ aperto

e $\omega \in A^{p,q}(A)$

t.c. $\bar{\partial}\omega = 0$

allora esiste $\{A_\alpha\}$ ricoprimento aperto di A, $\exists\, \eta_\alpha \in A^{p,q-1}(A_\alpha)$ $\forall \alpha$

t.c. $\omega|_{A_\alpha} = \bar{\partial}\eta_\alpha$.

$\rightsquigarrow$ ω è localmente $\bar{\partial}$-esatto

$\Rightarrow \overline{\omega} \in (\mathrm{Im}\,\overline{\partial})(A)$

$\Rightarrow$ la successione di fasci:

$$0 \to \Omega^p_X \hookrightarrow \mathcal{A}^{p,0}_X \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}^{p,1}_X \to \dots \to \mathcal{A}^{p,n}_X \to 0 \qquad (*)$$

è esatta.

I fasci $\mathcal{A}^{p,q}_X$ sono fasci di funz. C^∞, ed esattamente come nel caso reale si mostra che sono aciclici, cioè:

$$\check{H}^k(X, \mathcal{A}^{p,q}_X) = 0 \quad \forall k > 0$$

$\Rightarrow$ $(*)$ è una risoluzione aciclica del fascio Ω^p_X.

$\Rightarrow$ per il teorema di de Rham astratto, la coomologia del fascio Ω^p_X è isomorfa alla coomologia del complesso delle sezioni globali:

$$\mathcal{A}^{p,0}(X) \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}^{p,1}(X) \xrightarrow{\overline{\partial}} \dots \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}^{p,n}(X) \to$$

cioè la coomologia di Dolbeault

Otteniamo così:

Teorema di Dolbeault.

Sia X una varietà complessa. Allora

$$H^q(X, \Omega^p_X) \cong H^{p,q}_{\bar\partial}(X) = \frac{\{(p,q)\text{-forme } \bar\partial\text{-chiuse}\}}{\{(p,q)\text{-forme } \bar\partial\text{-esatte}\}}.$$

In particolare:

$$H^q(X, \Omega^p_X) = 0 \quad \forall q > \underset{\dim X}{\overset{\shortparallel}{n}}$$

Se X è compatta:

$$h^{p,q}(X) = \dim H^{p,q}_{\bar\partial}(X)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & h^{0,0} & & \\
 & h^{1,0} & & h^{0,1} & \\
 & & \vdots & & \\
h^{n,0} & h^{n-1,1} & \cdots & \cdots & h^{0,n} \\
 & & & & \\
 & & h^{n,n} & &
\end{array}$$

diamante di Hodge

~~Oss Se n = 1 :~~

$$\cancel{H^0(X, \Omega^0_X) = H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(X)}$$

<u>Oss</u> Per $q=0$ il teorema di Dolbeault è banale:

$$H^0(X, \Omega^p_X) = \{(p,0)\text{-forme } \bar\partial\text{-chiuse}\} = H^{p,0}_{\bar\partial}(X).$$

<u>Es.</u> Se $n = 1$ (e X cpta): sia $q = 1$

$$\underbrace{H^1(X, \mathcal{O}_X)}_{\dim = g_{top}} \cong H^{0,1}_{\bar\partial}(X) = \frac{\{(0,1)\text{-forme su } X\}}{\{(0,1)\text{-forme } \bar\partial\text{-esatte su } X\}} \qquad (p=0)$$

$$\underset{(p=1)}{H^1(X, \Omega^1_X)} \cong H^{1,1}_{\bar\partial}(X) = \frac{\{2\text{-forme su } X\}}{\{2\text{-forme } \bar\partial\text{-esatte}\}}$$

$$H^1(X, \Omega^1_X) \cong \mathbb{C}$$

Diamante di Hodge:

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ g & & g \\ & 1 & \end{array}$$

GEOMETRIA SUPERIORE 19/5/2022

Oss Sia X una superficie di Riemann cpta.

$$A^2_{\mathbb{C}}(X) = A^{1,1}(X)$$ tutte d-chiuse e $\bar\partial$-chiuse

$$H^2_{dR}(X,\mathbb{C}) = \frac{A^2_{\mathbb{C}}(X)}{d A^1(X)} \quad \text{(de Rham)}$$

$$\begin{matrix} H^2_{dR}(X,\mathbb{C}) \\ \wr\wr \\ \mathbb{C} \end{matrix}$$

$$H^2_{dR}(X,\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$$

$$[\omega] \mapsto \int_X \omega$$

$\rightsquigarrow$ ω è d-esatta $\Longrightarrow$ $\int_X \omega = 0$.

$$H^{1,1}_{\bar\partial}(X) = \frac{A^2_{\mathbb{C}}(X)}{\{2\text{-forme } \bar\partial\text{-esatte}\}} = \frac{A^2_{\mathbb{C}}(X)}{dA^{1,0}(X)}$$

Nota: se η è una 1-forma di tipo $(1,0)$

$$\partial\eta = 0 \Longrightarrow d\eta = \bar\partial\eta$$

$\Rightarrow$ $\{2\text{-forme } \bar\partial\text{-esatte}\} = dA^{1,0}(X)$

$$A^{1,0}(X) \subseteq A^1(X) \Longrightarrow dA^{1,0}(X) \subseteq dA^1(X)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A^2_{\mathbb{C}}(X)}{dA^{1,0}(X)} \twoheadrightarrow \frac{A^2_{\mathbb{C}}(X)}{dA^1(X)}$$

$$\begin{matrix} \| & & \| \\ H^{1,1}_{\bar\partial}(X) & & H^2_{dR}(X,\mathbb{C}) \overset{\text{integrale}}{\cong} \mathbb{C} \end{matrix}$$

Dal teorema di Dolbeault:

$$H^{1,1}_{\bar\partial}(X) \cong H^1(X, \Omega^1_X) \overset{\text{Serre}}{\cong} H^0(X, \mathcal{O}_X) \cong \mathbb{C}$$

$\Rightarrow$ la mappa
$$H^{1,1}_{\bar\partial}(X) \longrightarrow H^2_{dR}(X,\mathbb{C})$$
$$[\omega]_{\bar\partial} \longmapsto [\omega]_d$$

è isomorfismo, e concludiamo che per $\omega \in A^2_{\mathbb{C}}(X)$ si ha:

ω è d-esatta $\Leftrightarrow$ ω è $\bar\partial$-esatta

$$\Leftrightarrow \int_X \omega = 0.$$

Decomposizione di Hodge.

Sia X una varietà complessa compatta kaehleriana (sempre vero se $\dim X = 1$)

Ricordiamo che:

$$H^k_{dR}(X,\mathbb{C}) = \frac{\{k\text{-forme chiuse complesse } C^\infty\}}{\{k\text{-forme esatte}\}}$$

e:

$$A^k(X) = \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q}(X).$$

Nota: anche se ω è chiusa, in generale (3)
le sue parti di tipo (p,q) non lo sono
↪ la decomposizione a priori non passa
in coomologia.

Definiamo

$$H^{p,q}(X) := \{ \xi \in H^{p+q}_{dR}(X, \mathbb{C}) \mid$$

ξ ha un rappresentante ω che è di
tipo (p,q).

- $H^{p,q}(X)$ è un sottospazio vettoriale di $H^{p+q}_{dR}(X, \mathbb{C})$
- $\overline{H^{p,q}(X)} = H^{q,p}(X)$ dentro $H^{p+q}_{dR}(X, \mathbb{C})$

perché: se $\xi \in H^{p,q}(X)$

$\xi = [\omega]$ $\quad \omega$ d-chiusa, (p,q)

$\bar{\xi} = [\bar{\omega}]$ $\quad \bar{\omega}$ d-chiusa, (q,p)

$\Rightarrow \bar{\xi} \in H^{q,p}(X)$

Nota: il coniugio è un
automorfismo $\mathbb{R}$-lineare di $H^{p+q}_{dR}(X, \mathbb{C})$

$\Rightarrow H^{p,q}(X)$ e $H^{q,p}(X)$ sono isomorfi
come spazi vettoriali reali

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} H^{p,q}(X) = \dim_{\mathbb{R}} H^{q,p}(X)$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^{q,p}(X)$.

OSS Se ω è di tipo (p,q), allora

ω è d-chiusa $\iff$ ω è ∂-chiusa e $\bar\partial$-chiusa.

$\boxed{\text{DIM}}$ $d\omega = \underbrace{\partial\omega}_{\text{tipo }(p+1,q)} + \underbrace{\bar\partial\omega}_{\text{tipo }(p,q+1)}$

Quindi $d\omega = 0 \Rightarrow \partial\omega = \bar\partial\omega = 0$.

Teorema (decomposizione di Hodge).

X proiettiva.

1) Sia ω una (p,q)-forma d-chiusa. Allora sono equivalenti:

(i) ω è d-esatta

(ii) ω è ∂-esatta

(iii) ω è $\bar\partial$-esatta

2) La mappa

$$\underset{\substack{\cap \\ H^{p+q}_{dR}(X)}}{H^{p,q}(X)} \longrightarrow H^{p,q}_{\bar\partial}(X)$$

$$\xi = [\underset{(p,q)}{\omega}]_d \longmapsto [\omega]_{\bar\partial}$$

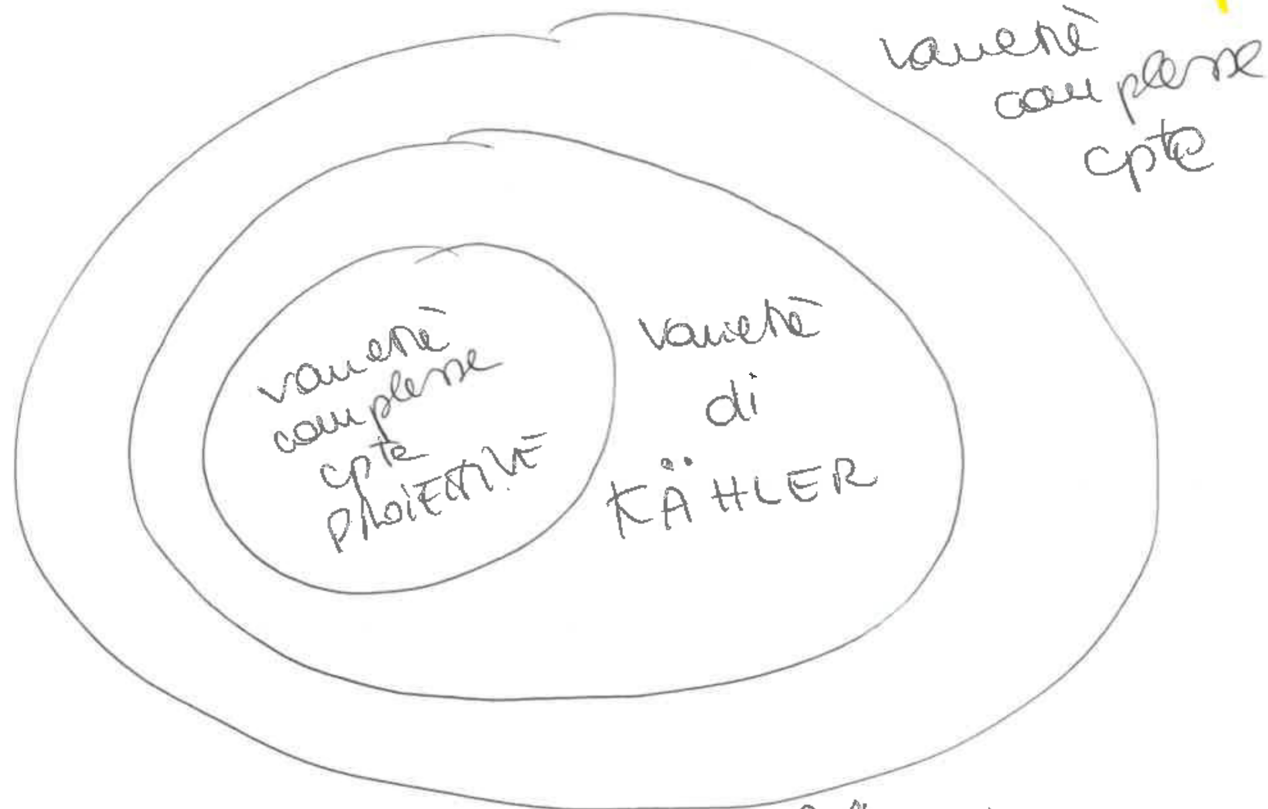
è ben definita (per l'OSS. e per 1) ed è isomorfismo.

3) Si ha: $H^k_{dR}(X, \mathbb{C}) = \underbrace{\bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)}$ (5)

(decomposizione di Hodge).

invariante topologico di X (coomologia singolare)

dipendono da struttura complessa.



$$\dim H^{p,q}(X) = h^{p,q}(X)$$ numeri di Hodge

$$= \dim H^q(X, \Omega^p_X)$$

$$\boxed{h^{p,q}(X) = h^{q,p}(X)}$$ simmetria

Diamante di Hodge:

$$h^{0,0} = 1$$

$$h^{1,0} \quad h^{0,1} \qquad (h^{1,0} = h^{0,1})$$

$$h^{2,0} \quad h^{11} \quad h^{0,2}$$

$$h^{n,0} \; \dots\dots \; h^{0,n}$$

$$h^{n-1,0} \; \dots\dots \; h^{0,n-1}$$

$$\vdots$$

$$h^{n,n} = 1$$

$$\underbrace{b_k(X)}_{\text{numero di Betti}} = \sum_{p+q=k} h^{p,q}(X)$$

$$b_1(X) = 2\, h^{0,1}(X) \quad \underline{\text{pari}}$$

$\Longrightarrow$ i numeri di Betti di indice dispari di X sono sempre pari.

Dualità di Poincaré:

$$H^k_{dR}(X, \mathbb{C}) \times H^{2n-k}(X, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$$

non degenere

$$\rightsquigarrow b_k(X) = b_{2n-k}(X)$$

$$H^k_{dR}(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)$$

⑦

$$H^{2n-k}_{dR}(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{a+b=2n-k} H^{a,b}(X) =$$

$$p = n-a \qquad a = n-p$$
$$q = n-b \qquad b = n-q$$

$$= \bigoplus_{p+q=k} H^{n-p,n-q}(X)$$

$$dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_p}\wedge d\bar z_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z_{j_q} \quad p+q=k$$

$$\wedge \underbrace{\omega}_{2n-k}$$ forme

l'unico pezzo che non muore

è $\omega_{n-p,\,n-q}$

⇝ la dualità di Poincaré induce una dualità

$$H^{p,q}(X) \times H^{n-p,\,n-q}(X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\rightsquigarrow \quad h^{p,q}(X) = h^{n-p,\,n-q}(X)$$

ulteriore simmetria.

<u>ES.</u> Se X è una superficie di Riemann

cpta:

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ g & & g \\ & 1 & \end{array} \qquad h^{1,0}(X) = h^{0,1}(X) = g$$

$$b_1 = 2g$$

$$\to \underbrace{H^1_{dR}(X,\mathbb{C})}_{\dim 2g} = \underbrace{H^{1,0}(X)}_{g} \oplus \underbrace{H^{0,1}(X)}_{g}$$