Università degli Studi di Torino
Corso di Laurea Magistrale in Matematica
A.A. 2025-2026

Programma d'esame della prima parte del corso di
**Istituzioni di Analisi Matematica**
Prof. Paolo Caldiroli

**Spazi $L^p$ (prima parte).** Generalità sugli spazi normati, esempi. Spazi normati finito-dimensionali con la stessa dimensione sono isomorfi. Spazi $L^p$: struttura vettoriale per $0 < p \leq \infty$, normabilità per $1 \leq p \leq \infty$ (disuguaglianze di Young, Hölder, Minkowski), completezza per $1 \leq p \leq \infty$ (teorema di Fischer-Riesz). Relazione tra convergenza puntuale quasi ovunque e convergenza $L^p$. Unicità del limite in caso di convergenza in $L^p$ diversi. Disuguaglianza di interpolazione (solo enunciato). Limite della norma $L^p$ per $p \to \infty$. Spazi $\ell^p$. Relazione tra spazi $L^p$: caso degli spazi $\ell^p$; caso di misura finita; non confrontabilità tra gli spazi $L^p(\mathbb{R})$. Densità delle funzioni semplici in $L^p$ per $1 \leq p \leq \infty$. Densità delle funzioni continue a supporto compatto in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $1 \leq p < \infty$. Separabilità degli spazi $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $1 \leq p < \infty$.

**Convoluzione e mollificatori.** Prodotto di convoluzione. Disuguaglianza di Young (senza dimostrazione). Buona definizione e continuità del prodotto di convoluzione tra una funzione in $C_c(\mathbb{R}^N)$ e una funzione in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Regolarità $C^k$ del prodotto di convoluzione tra una funzione in $C^k_c(\mathbb{R}^N)$ e una funzione in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Mollificatori. Esempio di Friedrichs. Regolarizzazione mediante mollificatori. Convergenza delle $\varepsilon$-regolarizzate di $f$ nella norma lagrangiana, nel caso $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$. Convergenza delle $\varepsilon$-regolarizzate di $f$ in $L^p$, nel caso $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p < \infty$. Densità delle funzioni lisce negli spazi $L^p(\Omega)$ per $1 \leq p < \infty$. Applicazioni: lemma fondamentale del calcolo delle variazioni; teorema di approssimazione di Weierstrass. Separabilità dello spazio $C[a, b]$.

**Compattezza in $C[a, b]$, in $L^p$ e in spazi normati astratti.** Richiami sulla compattezza in spazi metrici. Insiemi totalmente limitati. Uno spazio metrico è compatto se e solo se è chiuso e totalmente limitato. Insiemi precompatti. Un sottoinsieme di uno spazio metrico completo è precompatto se e solo se è totalmente limitato. Teorema di Ascoli-Arzelà. Generalizzazione al caso di spazi metrici (solo enunciato). Versione sequenziale. La equilipscitzianità implica la equicontinuità. Applicazione: teorema di Peano sul problema di Cauchy. Teorema di Fréchet-Kolmogorov-Riesz sulla precompattezza in $L^p(\mathbb{R}^N)$ (senza dimostrazione). Negli spazi normati infinito-dimensionali la palla chiusa non è mai compatta per la topologia forte. Lemma di Riesz ($\varepsilon$-ortogonalità).

**Generalità sugli operatori tra spazi normati. Lo spazio duale.** Operatori lineari e continui tra spazi normati. Condizioni equivalenti per la continuità di operatori lineari. La norma operatoriale e sue caratterizzazioni equivalenti. Lo spazio degli operatori lineari e continui da uno spazio normato $X$ in uno spazio normato $Y$ è completo se lo è $Y$ (solo enunciato). Spazio duale. Esempi notevoli di funzionali lineari e continui negli spazi $L^p$ e $C[a, b]$.

**Teoremi fondamentali dell'analisi funzionale lineare.** Teorema di Hahn-Banach (forma analitica, via lemma di Zorn). Prodotto di dualità e caratterizzazione duale della norma. Caratterizzazione dei sottospazi densi in uno spazio normato. Iperpiani chiusi. Gauge di un convesso. Teoremi di separazione di Hahn-Banach. Lemma di Baire. Negli spazi infinito-dimensionali le basi di Hamel sono più che numerabili. Teorema di Banach-Steinhaus e suo corollario. Insiemi debolmente limitati. Teorema dell'applicazione aperta. L'inverso di un operatore lineare continuo e biiettivo tra spazi di Banach è continuo. Norme confrontabili e norme equivalenti. Teorema del grafico chiuso (senza dimostrazione).

**Topologie deboli.** Costruzione della topologia debole. Confronto con la topologia forte. In spazi infinito-dimensionali per ogni punto di un aperto non vuoto nella topologia debole passa una retta. Proprietà delle successioni debolmente convergenti. Norme uniformemente convesse. Ruolo della convessità nella topologia debole. In uno spazio normato infinito-dimensionale la palla non è debolmente aperta, la sfera non è debolmente chiusa e la sua chiusura nella topologia debole è la palla chiusa. Spazi riflessivi: definizione, esempi, teoremi di Kakutani, di Eberlein-Smulian e di Milman-Pettis (non dimostrati). In uno spazio riflessivo la palla chiusa è debolmente compatta. Richiami di topologia generale: net, teorema di Tychonoff. Topologia debole*. Teorema di Banach-Alaoglou. Topologia della semicontinuità inferiore e minimizzazione di funzionali in chiusi e convessi di spazi riflessivi. Teorema di James (senza dimostrazione). Lo spazio $C[0,1]$ non è riflessivo.

**Proprietà di riflessività e duali degli spazi $L^p$.** Uniforme convessità di $L^p$ per $2 \le p < \infty$ via disuguaglianza di Clarkson. Riflessività di $L^p$ per $1 < p < 2$. Duale di $L^p$ per $1 < p < \infty$. Non riflessività di $L^1$. Spazio duale di $L^1$ (dimostrato solo nel caso di misura finita). Sullo spazio $L^\infty$: non riflessività, il duale è più grande di $L^1$.

**Spazi di Hilbert.** Prodotto interno, esempi, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz-Bunjakowskij, identità del parallelogramma, uniforme convessità, spazio duale (Teorema di Riesz-Fréchet). Convergenza debole in spazi di Hilbert. Proiezione sui convessi. Insiemi e sottospazi ortogonali e teorema di decomposizione ortogonale. Sistemi ortogonali e basi hilbertiane. Disuguaglianza di Bessel, identità di Parseval, rappresentazione in serie di Fourier rispetto ad una fissata base hilbertiana (caso di spazi separabili). Ogni spazio di Hilbert separabile infinito-dimensionale è isomorfo a $\ell^2$. Lo spazio $L^2$ delle funzioni periodiche e la base hilbertiana di Fourier.

## Bibliografia

H. Brezis: Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations (Springer, 2011), oppure la versione in italiano, Analisi funzionale: teoria e applicazioni (Liguori, 1983). In particolare, i primi cinque capitoli.

A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin: Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale (Editori Riuniti). In particolare, per il capitolo sulla compattezza in $C[a,b]$.

H.L. Royden: Real Analysis (Macmillan, 1988). In particolare, per i richiami di topologia generale e Teorema di Tychonoff.

Appunti ed altri materiali disponibili sulla pagina Moodle dell'insegnamento.