

Università degli Studi di Torino
Corso di Laurea Magistrale in Matematica
A.A. 2025-2026

Programma d'esame della seconda parte del corso di
Istituzioni di Analisi Matematica
Prof. Jörg Seiler

L'operatore aggiunto. Definizione e proprietà fondamentali dell'aggiunto di un operatore lineare e continuo su uno spazio di Hilbert. Esempi. Definizione di operatore autoaggiunto, unitario, normale. Norma degli operatori autoaggiunti. Caratterizzazione degli operatori autoaggiunti e delle proiezioni ortogonali.

Operatori compatti in spazi di Hilbert. Operatori di rango finito e loro rappresentazione. Definizione di operatore compatto (in uno spazio di Hilbert). Esempio: operatori integrali con nucleo a quadrato integrabile. Caratterizzazione degli operatori compatti. Definizione di operatore compatto (in uno spazio di Banach).

Operatori di Fredholm. Operatori invertibili e serie di Neumann. Continuità dell'inversione. Definizione di operatore di Fredholm/operatore ad indice. Esempio: operatore derivata. Invertibilità modulo operatori di rango finito e modulo operatori compatti. "Completamento" di operatori di Fredholm a operatori invertibili. L'insieme degli operatori di Fredholm è un sottoinsieme aperto degli operatori limitati. L'indice è una funzione localmente costante. Stabilità dell'indice rispetto a perturbazioni compatte. Composizione di operatori di Fredholm.

Teoria spettrale. Lo spettro e l'insieme risolvente degli operatori limitati. Lo spettro degli operatori autoaggiunti. Esempio: Operatore di moltiplicazione per una funzione. Esempio: Operatori left/right-shift in ℓ^2 . Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti. Spettro di operatori di rango finito.

Operatori di Toeplitz. Definizione dello spazio di Hardy (per funzioni 2π -periodiche). Operatori di Toeplitz. Proprietà di Fredholm degli operatori di Toeplitz e formula dell'indice.

Distribuzioni. Il supporto delle funzioni continue. Le funzioni test. Convergenza di successioni di funzioni test. Definizione di distribuzione. La disegualanza di controllo. Esempio: distribuzioni regolari. Esempio: distribuzione δ centrata in un punto. Esempio: valore principale di $1/x$. Convergenza di una successione di distribuzioni. Prodotto di funzioni regolari e distribuzioni. Derivata (parziale) di distribuzioni. Derivata debole di funzioni con punti di salto. Soluzione fondamentale, equazioni impulsive, teorema di Malgrange-Ehrenpreis, Laplaciano. Il supporto di una distribuzione.

La trasformata di Fourier. Trasformata di Fourier per funzioni $L^1(\mathbb{R}^n)$. Lemma di Riemann-Lebesgue. Formula di inversione. Trasformata di Fourier per funzioni $L^2(\mathbb{R}^n)$. Parseval-Plancherel formula. Teorema di Plancherel.