0 Richiami sugli operatori limitati

Denotiamo con X, Y, Z degli spazi di Banach complessi, con H, H_1, H_2 degli spazi di Hilbert complessi separabili (cioè con base ortonormale numerabile).

Per un operatore lineare $T : X \to Y$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- T è continuo in X (cioè in ogni punto $x \in X$).
- T è continuo in $x = 0$.
- T è limitato, cioè: $\quad \exists\, M \geqslant 0 \quad \forall\, x \in X : \quad \|Tx\|_Y \leqslant M\|x\|_X$.
- Se $B = \{x \in X \mid \|x\|_X \leqslant 1\}$, allora $T(B) \subseteq Y$ è limitato.

Scriviamo

$$\boxed{\mathscr{L}(X,Y) := \{T : X \to Y \mid T \text{ lineare e limitato}\}, \qquad \mathscr{L}(X) := \mathscr{L}(X,X).}$$

Si ricorda che $X' = \mathscr{L}(X, \mathbb{C})$ (spazio duale di X).

$\mathscr{L}(X,Y)$ è uno spazio di Banach con norma

$$\boxed{\|T\| = \|T\|_{\mathscr{L}(X,Y)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y.}$$

La composizione ST di $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ e $S \in \mathscr{L}(Y,Z)$ appartiene a $\mathscr{L}(X,Z)$ e

$$\boxed{\|ST\|_{\mathscr{L}(X,Z)} \leqslant \|S\|_{\mathscr{L}(Y,Z)} \|T\|_{\mathscr{L}(X,Y)}.}$$

Il nucleo, rispettivamente l'immagine di $T \in \mathscr{L}(X,Y)$, sono

$$\boxed{\ker T = \{x \in X \mid Tx = 0\}, \qquad \operatorname{im} T = \{y \in Y \mid \exists\, x \in X : \ y = Tx\}.}$$

Si ricorda che T è iniettivo se e solo se $\ker T = \{0\}$.

0.1 Teorema (di Banach)**.** *Sia $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ biettivo. Allora $T^{-1} \in \mathscr{L}(Y,X)$. Si chiama T^{-1} l'inversa di T e T si dice invertibile.*

0.2 Teorema (di Riesz-Fréchet)**.** *Sia $x' \in H' = \mathscr{L}(H, \mathbb{C})$ un funzionale. Allora esiste un unico $y = y(x') \in H$ tale che*

$$x'(x) = (x, y) \qquad \forall\, x \in H.$$

Vale $\|y\| = \|x'\|$. L'applicazione $x' \mapsto y(x') : H' \to H$ è antilineare e biettiva.

La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e il Teorema di Hahn-Banach implicano

$$\boxed{\|x\|_H = \sup_{\|y\|_H = 1} |(x,y)_H|, \qquad \|x\|_X = \sup_{\|x'\|_{X'} = 1} |x'(x)|.}$$