Operatori integrali in spazi L^2

1.4 Esempio. *Siano $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ e $k : U \times V \to \mathbb{C}$ misurabili. L'operatore integrale T su V con nucleo integrale k associa a funzioni $f : V \to \mathbb{C}$ la funzione $Tf : U \to \mathbb{C}$ tramite*

$$\boxed{(Tf)(u) = \int_V k(u,v) f(v)\, dv, \qquad u \in U.}$$

Supponiamo che esistono $c_1, c_2 \geqslant 0$ tale che

$$\int_U |k(u,v)|\, du \leqslant c_1, \quad \int_V |k(u,v)|\, dv \leqslant c_2 \qquad \text{quasi ovunque.}$$

Allora $T \in \mathscr{L}(L^2(V), L^2(U))$ con $\|T\| \leqslant \sqrt{c_1 c_2}$ ("Lemma di Schur"). L'operatore aggiunto T^* è l'operatore integrale con nucleo $k^{(*)}(v,u) := \overline{k(u,v)}$, cioè

$$\boxed{(T^* g)(v) = \int_U \overline{k(u,v)} g(u)\, du, \qquad v \in V.}$$

In fatti, sfruttando le ipotesi, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz ed il Teorema di Fubini-Tonelli, si trova:

$$\begin{aligned}
|(Tf)(u)|^2 &= \left| \int_V k(u,v) f(v)\, dv \right|^2 \leqslant \left[\int_V |k(u,v)|^{\frac{1}{2}} |k(u,v)|^{\frac{1}{2}} |f(v)|\, dv \right]^2 \\
&\leqslant \left(\int_V |k(u,v)|\, dv \right) \cdot \left[\int_V |k(u,v)|\, |f(v)|^2\, dv \right] \\
&\leqslant c_2 \int_V |k(u,v)|\, |f(v)|^2\, dv \\
\Rightarrow \|Tf\|^2_{L^2(U)} &\leqslant c_2 \int_{U\times V} |k(u,v)|\, |f(v)|^2\, dvdu \leqslant c_1\, c_2 \int_V |f(v)|^2\, dv \\
&= c_1\, c_2\, \|f\|^2_{L^2(V)}.
\end{aligned}$$

La seconda affermazione è una conseguenza immediata della definizione di operatore aggiunto e del Teorema di Fubini-Tonelli. Infatti, per ogni $f \in L^2(V)$, $g \in L^2(U)$, si ha

$$\begin{aligned}
(Tf, g)_{L^2(U)} &= \int_U \left[\int_V k(u,v)\, f(v)\, dv \right] \overline{g(u)}\, du \\
&= \int_{U\times V} k(u,v)\, f(v)\, \overline{g(u)}\, dvdu \\
&= \int_V f(v) \overline{\left[\int_U \overline{k(u,v)}\, g(u)\, du \right]} dv = (f, T^* g)_{L^2(V)},
\end{aligned}$$

con

$$(T^* g)(v) = \int_U \overline{k(u,v)}\, g(u)\, du = \int_U k^{(*)}(v,u)\, g(u)\, du.$$