Esercizi – Capitolo 1

Esercizio 1.1 *Sia* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *una matrice invertibile. Per funzioni* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *definiamo*

$$(Tf)(x) = f(Ax), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dimostrare che $T \in \mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ *e determinare l'aggiunto di* T.

Esercizio 1.2 *Sia* $T \in \mathscr{L}(H)$. *Dimostrare*:

$$T \text{ normale} \iff \|Tx\| = \|T^*x\| \quad \forall\, x \in H.$$

Esercizio 1.3 *Sia* $T \in \mathscr{L}(H)$. *Dimostrare*:

$$T \text{ è suriettivo} \iff T^* \text{ è iniettivo e } \operatorname{im} T \text{ è chiuso}.$$

Esercizio 1.4 *Siano* $P, Q \in \mathscr{L}(H)$ *due proiezioni ortogonali. Dimostrare*:

$$PQ \text{ proiezione ortogonale} \iff PQ = QP.$$

In questo caso, PQ *è la proiezione ortogonale su* $\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q$.

Esercizio 1.5 *Siano* $P, Q \in \mathscr{L}(H)$ *due proiezioni ortogonali. Dimostrare*:

$$\operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} Q \iff \|Px\| \le \|Qx\| \qquad \forall\, x \in H.$$

Esercizio 1.6 *Siano* $P, Q \in \mathscr{L}(H)$ *due proiezioni ortogonali. Dimostrare*:

$$P + Q \text{ proiezione ortogonale} \iff PQ = QP = 0.$$

In questo caso, $P + Q$ *è la proiezione ortogonale su* $\operatorname{im} P \oplus \operatorname{im} Q$.