# Soluzioni esercizi – Capitolo 1

**Esercizio 1.1** Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice invertibile. Per funzioni $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ definiamo

$$(Tf)(x) = f(Ax), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dimostrare che $T \in \mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ e determinare l'aggiunto di $T$.

Soluzione: Utilizziamo il cambio di variabili $y = Ax$, $dy = |\det A|\,dx$.

$$\|Tf\|_{L^2}^2 = \int |f(Ax)|^2\,dx = |\det A|^{-1}\int |f(y)|^2\,dy = |\det A|^{-1}\|f\|_{L^2}^2.$$

Quindi $T \in \mathscr{L}(L^2)$ con $\|T\| \le |\det A|^{-1/2}$. Inoltre

$$(Tf,g) = \int f(Ax)\overline{g(x)}\,dx = \int f(y)\overline{|\det A|^{-1}g(A^{-1}y)}\,dy.$$

Quindi $(T^*g)(y) = |\det A|^{-1}g(A^{-1}y)$, $g \in L^2$.

**Esercizio 1.2** Sia $T \in \mathscr{L}(H)$. Dimostrare:

$$T \text{ normale} \iff \|Tx\| = \|T^*x\| \quad \forall\, x \in H.$$

Soluzione: $S := T^*T - TT^*$ è autoaggiunto. Allora

$$\begin{aligned} T \text{ normale} &\iff T^*T = TT^* \iff S = 0 \overset{1.7}{\iff} (Sx,x) = 0 \quad \forall\, x \in H \\ &\iff (T^*Tx,x) = (TT^*x,x) \quad \forall\, x \in H \\ &\iff (Tx,Tx) = (T^*x,T^*x) \quad \forall\, x \in H \\ &\iff \|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2 \quad \forall\, x \in H. \end{aligned}$$

**Esercizio 1.3** Sia $T \in \mathscr{L}(H)$. Dimostrare:

$$T \text{ è suriettivo} \iff T^* \text{ è iniettivo e } \operatorname{im} T \text{ è chiuso.}$$

Soluzione: "$\Leftarrow$": $\operatorname{im} T = \overline{\operatorname{im} T} = (\operatorname{im} T)^{\perp\perp} = (\ker T^*)^\perp = \{0\}^\perp = H$

"$\Rightarrow$": $\ker T^* = (\operatorname{im} T)^\perp = H^\perp = \{0\} \Rightarrow T^*$ iniettivo.

$\operatorname{im} T = H$ è ovviamente chiuso.

**Esercizio 1.4** Siano $P, Q \in \mathscr{L}(H)$ due proiezioni ortogonali. Dimostrare:

$$PQ \text{ proiezione ortogonale} \iff PQ = QP.$$

In questo caso, $PQ$ è la proiezione ortogonale su $\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q$.

Soluzione: "$\Rightarrow$": $PQ$ proiezione ortogonale $\Rightarrow PQ = (PQ)^* = Q^*P^* = QP$.

"$\Leftarrow$": $PQ = QP \Rightarrow \begin{cases} (PQ)^2 = PQPQ = PPQQ = PQ, \\ (PQ)^* = (QP)^* = P^*Q^* = PQ \end{cases} \Rightarrow PQ$ proiezione ortogonale.

Sia $PQ$ una proiezione ortogonale.

$x \in \operatorname{im} PQ \Rightarrow \exists\, y \in H : \quad x = PQy = P(Qy) = Q(Py) \Rightarrow x \in \operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q$.

$x \in \operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q \Rightarrow PQx = Px = x \Rightarrow x \in \operatorname{im} PQ$.

**Esercizio 1.5** Siano $P, Q \in \mathscr{L}(H)$ due proiezioni ortogonali. Dimostrare:

$$\operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} Q \iff \|Px\| \leq \|Qx\| \qquad \forall\, x \in H.$$

Soluzione: $H = \operatorname{im} Q \oplus \ker Q$

Quindi: $x \in \operatorname{im} Q \iff Qx = x$.

Quindi: $\operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} Q \iff QP = P$.

- $QP = P \Rightarrow P = P^* = (QP)^* = P^*Q^* = PQ$
  $\Rightarrow \|Px\| = \|PQx\| \leq \|P\|\|Qx\| \leq \|Qx\| \quad \forall\, x \in H$.
- $\|Px\| \leq \|Qx\| \quad \forall\, x \in H \Rightarrow \|P(1-Q)y\| \leq \|Q(1-Q)y\| = 0 \quad \forall\, y \in H$
  $\Rightarrow P(1-Q) = 0 \Rightarrow P = PQ \Rightarrow P = P^* = (PQ)^* = Q^*P^* = QP$.

**Esercizio 1.6** Siano $P, Q \in \mathscr{L}(H)$ due proiezioni ortogonali. Dimostrare:

$$P + Q \text{ proiezione ortogonale} \iff PQ = QP = 0.$$

In questo caso, $P + Q$ è la proiezione ortogonale su $\operatorname{im} P \oplus \operatorname{im} Q$.

Soluzione: Osserviamo che $(P+Q)^* = P^* + Q^* = P + Q$.

"$\Leftarrow$:" $PQ = QP = 0 \Rightarrow (P+Q)^2 = P^2 + PQ + QP + Q^2 = P + Q$.

"$\Rightarrow$:" $P + Q = (P+Q)^2 = P^2 + PQ + QP + Q^2 \Rightarrow PQ + QP = 0$

$\Rightarrow PQ = -QP \ (*)$

Componendo con $P$ a destra ed a sinistra $\Rightarrow PQ = -PQP$ e $-QP = PQP$

$\Rightarrow PQ = QP\ (**)$

$(*), (**) \Rightarrow PQ = QP = 0.$

Sia $P + Q$ una proiezione ortogonale.

$x \in \operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q \Rightarrow x = Px = P(Qx) = 0 \Rightarrow \operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q = \{0\}.$

Ovviamente, $\operatorname{im}(P + Q) \subseteq \operatorname{im} P + \operatorname{im} Q.$

$x \in \operatorname{im} P + \operatorname{im} Q \Rightarrow \exists\, y, z \in H : \quad x = Py + Qz$

$\Rightarrow (P + Q)x = P^2y + PQz + QPy + Q^2z = Py + Qz = x$

$\Rightarrow x \in \operatorname{im}(P + Q)$