Esercizi – Capitolo 2

Esercizio 2.1 *Sia* $T \in \mathscr{L}(H)$. *Dimostrare*:

$$T \in \mathscr{K}(H) \iff T^*T \in \mathscr{K}(H).$$

Esercizio 2.2 *Sia* $T \in \mathscr{L}(H)$ *e* V *uno sottospazio chiuso di* H *tale che* $T(V) \subseteq V$. *Dimostrare:*

a) T *autoaggiunto* $\Rightarrow T(V^\perp) \subset V^\perp$.

b) T *compatto* $\Rightarrow T|_V : V \to V$ *compatto.*

Esercizio 2.3 *Sia* $(a_n) \subset \mathbb{C}$ *una successione convergente ad* a *e sia* $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ *definito da*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, a_4x_4, \ldots).$$

Dimostrare che $aI - T$ *è un operatore compatto.*

Esercizio 2.4 *Sia* $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ *una base ortonormale di* $L^2(A)$. *Dimostrare che le funzioni*

$$f_{jk}(s,t) := e_j(s)e_k(t), \qquad j,k \geq 1,$$

definiscono una base ortonormale $\{f_{jk} \mid j,k \geq 1\}$ *di* $L^2(A \times A)$.

Avviso: *Si utilizzi il seguente teorema*: *Un sistema ortonormale* $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ *in uno spazio di Hilbert è una base ortonormale se, e solo se,*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |(x, x_k)|^2 \qquad \forall\, x \in H.$$