

Soluzioni esercizi – Capitolo 2

Esercizio 2.1 Sia $T \in \mathcal{L}(H)$. Dimostrare:

$$T \in \mathcal{K}(H) \iff T^*T \in \mathcal{K}(H).$$

SOLUZIONE: “ $\Rightarrow$ ”: $T \in \mathcal{K}(H)$, $T^* \in \mathcal{L}(H) \xrightarrow{\text{Teorema 2.6,c)}} T^*T \in \mathcal{K}(H)$

“ $\Leftarrow$ ”: Sia $(x_n) \subset H$ successione limitata, $M := \sup_n \|x_n\|$.

$T^*T \in \mathcal{K}(H) \Rightarrow \exists (x_{n_k}) : (T^*Tx_{n_k})$ è convergente.

Osserviamo che

$$\|Tx - Ty\|^2 = (T(x - y), T(x - y)) = |(x - y, T^*T(x - y))| \leq \|x - y\| \|T^*Tx - T^*Ty\|.$$

Ne segue

$$\|Tx_{n_k} - Tx_{n_\ell}\|^2 \leq 2M \|T^*Tx_{n_k} - T^*Tx_{n_\ell}\|^2$$

$\Rightarrow (Tx_{n_k})$ successione di Cauchy, quindi convergente.

Teorema 2.8 $\Rightarrow T \in \mathcal{K}(H)$.

Esercizio 2.2 Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ e V uno sottospazio chiuso di H tale che $T(V) \subseteq V$. Dimostrare:

a) T autoaggiunto $\Rightarrow T(V^\perp) \subset V^\perp$.

b) T compatto $\Rightarrow T|_V : V \rightarrow V$ compatto.

SOLUZIONE: a) Sia $x \in V^\perp$ e $y \in V$ arbitrario.

$$Ty \in V, T = T^* \Rightarrow (Tx, y) = (x, Ty) = 0 \Rightarrow Tx \in V^\perp.$$

b) Sia $(v_n) \subset V$ successione limitata.

(v_n) limitata in H , $T \in \mathcal{K}(H) \Rightarrow \exists (v_{n_k}) : (Tv_{n_k})$ convergente in H .

$(Tv_{n_k}) \subset V$, V chiuso $\Rightarrow (Tv_{n_k})$ convergente in V .

Teorema 2.8 $\Rightarrow T|_V \in \mathcal{K}(V)$.

Esercizio 2.3 Sia $(a_n) \subset \mathbb{C}$ una successione convergente ad a e sia $T : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ definito da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, a_4x_4, \dots).$$

Dimostrare che $aI - T$ è un operatore compatto.

SOLUZIONE: Sia $S := aI - T$. Allora

$$S(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (s_1x_1, s_2x_2, s_3x_3, s_4x_4, \dots)$$

con la successione $s_n = a - a_n$. Nota che $s_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

$$M := \sup_n |s_n|$$

$$\Rightarrow \|Sx\|^2 = \sum_n |s_nx_n|^2 \leq M^2 \sum_n |x_n|^2 = M^2 \|x\|^2 \quad \forall x \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

$$\Rightarrow S \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N})) \text{ con } \|T\| \leq M.$$

Sia $S_N \in \mathcal{F}(\ell^2(\mathbb{N}))$ definito da $S_Nx = (s_1x_1, s_2x_2, \dots, s_Nx_N, 0, 0, \dots)$.

Sia dato $\varepsilon > 0$.

$$(s_n) \text{ infinitesima} \Rightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_0 : \quad |s_n| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|S_Nx - Sx\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |s_nx_n|^2 < \varepsilon^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^2 \leq \varepsilon^2 \|x\|^2 \quad \forall N \geq N_0 \quad \forall x \in \ell^2(\mathbb{N})$$

$$\Rightarrow \|S_N - S\| < \varepsilon \quad \forall N \geq N_0$$

$$\Rightarrow S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} S$$

$$\Rightarrow S \in \mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{N})).$$

Esercizio 2.4 Sia $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ una base ortonormale di $L^2(A)$. Dimostrare che le funzioni

$$f_{jk}(s, t) := e_j(s)e_k(t), \quad j, k \geq 1,$$

definiscono una base ortonormale $\{f_{jk} \mid j, k \geq 1\}$ di $L^2(A \times A)$.

Avviso: Si utilizzi il seguente teorema: Un sistema ortonormale $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ in uno spazio di Hilbert è una base ortonormale se, e solo se,

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |(x, x_k)|^2 \quad \forall x \in H.$$

SOLUZIONE: Si ha

$$\begin{aligned} (f_{ij}, f_{k\ell})_{L^2(A \times A)} &= \iint_{A \times A} f_{ij}(s, t) \overline{f_{k\ell}(s, t)} ds dt = \int_A e_i(s) \overline{e_k(s)} ds \int_A e_j(t) \overline{e_\ell(t)} dt \\ &= (e_i, e_k)_{L^2(A)} (e_j, e_\ell)_{L^2(A)} = \begin{cases} 1 & i = k, j = \ell \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \{f_{ij}\}$ sistema ortonormale.

Sia $g \in L^2(A \times A)$. Calcoliamo

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L^2(A \times A)}^2 &= \int_A \left(\int_A |g(s, t)|^2 ds \right) dt = \int_A \|g(\cdot, t)\|_{L^2(A)}^2 dt \\
&= \int_A \left(\sum_j \underbrace{|(g(\cdot, t), e_j)_{L^2(A)}|^2}_{=: G_j(t)} \right) dt = \sum_j \int_A |G_j(t)|^2 dt \\
&= \sum_j \|G_j\|_{L^2(A)}^2 = \sum_j \sum_k |(G_j, e_k)_{L^2(A)}|^2 \\
&= \sum_{j,k} \left| \int_A G_j(t) \overline{e_k(t)} dt \right|^2 = \sum_{j,k} \left| \int_A \int_A g(s, t) \overline{e_j(s) e_k(t)} ds dt \right|^2 \\
&= \sum_{j,k} |(g, f_{jk})_{L^2(A \times A)}|^2.
\end{aligned}$$