

Esercizi – Capitolo 3

Esercizio 3.1 Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ nilpotente, cioè esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $T^N = 0$. Dimostrare che $I - T$ è invertibile.

Esercizio 3.2 Nei seguenti casi determinare $\dim \ker T$ e $\text{codim im } T$:

1) $T = \frac{d^2}{dx^2} : \mathcal{C}^2([a, b]) \rightarrow \mathcal{C}([a, b])$.

2) $T = \frac{d^2}{dx^2} : \mathcal{C}^2(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$.

3) $T \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ con $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_2, x_3, \dots)$.

Esercizio 3.3 Sia $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$. Determinare l'indice di T .

Esercizio 3.4 Siano $T_j : H \rightarrow H_j$, $j = 1, 2$, lineari. Dimostrare che

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} : H \rightarrow \begin{matrix} H_1 \\ \oplus \\ H_2 \end{matrix} \text{ biiettivo} \iff T_2 : H \rightarrow H_2 \text{ suriettivo e } T_1 : \ker T_2 \rightarrow H_1 \text{ biiettivo}.$$