Soluzioni esercizi – Capitolo 3

Esercizio 3.1 Sia $T \in \mathscr{L}(H)$ nilpotente, cioè esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $T^N = 0$. Dimostrare che $I - T$ è invertibile.

SOLUZIONE: $S := I + T + \dots T^{N-1} \Rightarrow S(I-T) = (I-T)S = I - T^N = I \Rightarrow (I-T)^{-1} = S$.

Esercizio 3.2 Nei seguenti casi determinare $\dim\ker T$ e $\operatorname{codim}\operatorname{im} T$:

1) $T = \frac{d^2}{dx^2} : \mathscr{C}^2([a,b]) \to \mathscr{C}([a,b])$.

2) $T = \frac{d^2}{dx^2} : \mathscr{C}^2(\mathbb{S}^1) \to \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$.

3) $T \in \mathscr{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ con $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_2, x_3, \dots)$.

SOLUZIONE: 1) $f'' \equiv 0 \iff f(x) = px + q$ $(p, q \in \mathbb{C})$

$\Rightarrow \ker T = \{f(x) = px + q \mid p, q \in \mathbb{C}\}$, $\dim\ker T = 2$.

$f \in \mathscr{C}([a,b])$ data, $g(x) := \displaystyle\int_a^x \int_a^y f(t)\,dt\,dy \Rightarrow g \in \mathscr{C}^2([a,b])$ e $g'' = f$.

$\Rightarrow T$ suriettivo, $\operatorname{codim}\operatorname{im} T = 0$.

2) Come prima, ma tenendo conto della periodicitå(che impone $p = 0$), troviamo:
$\ker T = \{f(x) = q \mid q \in \mathbb{C}\}$, $\dim\ker T = 1$.

Verifichamo che $\operatorname{im} T = \left\{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1) \mid \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0 \right\}$:

"$\subseteq$": $\displaystyle\int_0^{2\pi} Tf(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f''(x)\,dx = f'(2\pi) - f'(0) = 0.$

"$\supseteq$": Sia data f con $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$.

Sia $g(x) := \displaystyle\int_0^x \int_0^y f(t)\,dt\,dy + cx$ con $c = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^y f(t)\,dt\,dy$. Osserviamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(g(x+2\pi) - g(x)) &= \frac{d}{dx}\Big(\int_x^{x+2\pi}\int_0^y f(t)\,dt\,dy + 2\pi c\Big)\\ &= \int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0.\end{aligned}$$

$\Rightarrow g(x+2\pi) - g(x) \equiv \text{cost}$

$g(2\pi) - g(0) = 0 \Rightarrow g$ è 2π-periodica. Si ha quindi $f = g'' \in \operatorname{im} T$.

Inoltre, $\operatorname{codim}\operatorname{im} T = 1$ (cfr. Esempio 3.6).

3) $\ker T = \{(x_1, 0, 0, \ldots) \mid x_1 \in \mathbb{C}\}$, $\dim \ker T = 1$,
$\operatorname{im} T = \{x \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid x_1 = 0\}$, $\operatorname{codim} \operatorname{im} T = 1$.

Esercizio 3.3 Sia $T \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$. Determinare l'indice di T.

SOLUZIONE: Vale $\mathbb{C}^m/\ker T \cong \operatorname{im} T$ e quindi

$$\operatorname{codim} \operatorname{im} T = n - \dim \mathbb{C}^m/\ker T = n - (m - \dim \ker T).$$

Quindi $\operatorname{ind} T = m - n$.

Esercizio 3.4 Siano $T_j : H \to H_j$, $j = 1, 2$, lineari. Dimostrare che

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} : H \to \begin{matrix} H_1 \\ \oplus \\ H_2 \end{matrix} \text{ biiettivo} \iff T_2 : H \to H_2 \text{ suriettivo e } T_1 : \ker T_2 \to H_1 \text{ biiettivo.}$$

SOLUZIONE: Sia $T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$.

"$\Leftarrow$": $Tx = 0 \iff T_1x = T_2x = 0 \iff x \in \ker(T_1 : \ker T_2 \to H_1) \iff x = 0$

$\Rightarrow T$ iniettivo.

$(x_1, x_2) \in H_1 \oplus H_2 \Rightarrow \exists\, x \in H$ con $T_2x = x_2$ e $x' \in \ker T_2$ con $T_1x' = x_1 - T_1x$.

$\Rightarrow T(x + x') = (x_1, x_2) \Rightarrow T$ suriettivo.

"$\Rightarrow$": Dato $x_2 \in H_2$,

T suriettivo $\Rightarrow \exists\, x \in H : \quad (0, x_2) = Tx = (T_1x, T_2x) \Rightarrow T_2x = x_2 \Rightarrow T_2$ suriettivo.

Dato $x_1 \in H_1$,

T suriettivo $\Rightarrow \exists\, x \in H : \quad (x_1, 0) = Tx = (T_1x, T_2x)$.

$\Rightarrow x \in \ker T_2$ e $T_1x = x_1 \Rightarrow T_1 : \ker T_2 \to H_1$ suriettivo.

Sia $x \in \ker T_2 \cap \ker T_1$.

$\Rightarrow Tx = (0, 0) \Rightarrow x = 0$ (dato che T iniettivo)

$\Rightarrow T_1 : \ker T_2 \to H_1$ iniettivo.