Esercizi – Capitolo 4

Esercizio 4.1 *Sia* $T : \mathscr{C}([-1,1]) \to \mathscr{C}([-1,1])$ *l'operatore di moltiplicazione per la funzione* $h \in \mathscr{C}([-1,1])$, *cioè* $(Tf)(x) = h(x)f(x)$. *Nei seguenti casi calcolare spettro, autovalori e autofunzioni di* T :

a) $h(x) = 2x$.

b) $h(x) = 0$ *per* $x \leq 0$, $h(x) = x$ *per* $x > 0$.

Esercizio 4.2 *Sia* $T \in \mathscr{L}(H)$. *Dimostrare:*

a) $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)} = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$.

b) T *unitario* $\Rightarrow \sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

Esercizio 4.3 *Sia* $T \in \mathscr{L}(\ell^2)$ *con* $T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$. *Dimostrare che* $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$ *e che* T *non ha nessun autovalore.*

Esercizio 4.4 *Determinare autovalori, autofunzioni e risolvente degli operatori integrali in* L^2 *con nucleo* k :

a) $k(x,y) = xy$ *in* $[0,1]$,

b) $k(x,y) = xy + x^2y^2$ *in* $[-1,1]$,

c) $k(x,y) = x - y$ *in* $[0,1]$.

Trovare la soluzione f *in* L^2 *della seguente equazione integrale:*

d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin y f(y)\, dy - f(x) = x$ *in* $[0, 2\pi]$.

Esercizio 4.5 *Siano* $T \in \mathscr{L}(H)$ *e* $\lambda, \mu \in \rho(T)$. *Dimostrare che*

$$R(\mu, T) - R(\lambda, T) = (\lambda - \mu) R(\lambda, T) R(\mu, T).$$

Esercizio 4.6 *Sia* $T \in \mathscr{L}(H)$. *Dimostrare che* $\lambda \mapsto R(\lambda, T) : \rho(T) \to \mathscr{L}(H)$ *è continua.*

Esercizio 4.7 *Sia* $T \in \mathscr{K}(H)$ *autoaggiunto tale che* $(Tx, x) \geq 0$ *per ogni* $x \in H$. *Dimostrare che esiste un* $S \in \mathscr{L}(H)$ *tale che* $S^2 = T$.

Esercizio 4.8 *Sia $T \in \mathscr{K}(H)$ autoaggiunto e $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ base ortonormale di autovettori, $Tx_j = \lambda_j x_j$. Sia $\lambda \notin \sigma(T)$ e $y \in H$. Dimostrare che*

$$(\lambda I - T)^{-1} y = \frac{1}{\lambda} y + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\lambda_j}{\lambda - \lambda_j} (y, x_j) x_j.$$

Esercizio 4.9 *Sia K un operatore integrale con nucleo $k \in L^2(A \times A)$, cf. Esempio 2.5. Supponiamo che $k(s,t) = \overline{k(t,s)}$, quindi K è autoaggiunto. Sia $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ una base ortonormale di $L^2(A)$ di autofunzioni di K con $Ke_j = \lambda_j e_j$ per ogni j. Dimostrare che*

$$\|k\|^2_{L^2(A \times A)} = \sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j|^2.$$