Soluzioni esercizi – Capitolo 4

Esercizio 4.1 Sia $T : \mathscr{C}([-1,1]) \to \mathscr{C}([-1,1])$ l'operatore di moltiplicazione per la funzione $h \in \mathscr{C}([-1,1])$, cioè $(Tf)(x) = h(x)f(x)$. Nei seguenti casi calcolare spettro, autovalori e autofunzioni di T :

a) $h(x) = 2x$.

b) $h(x) = 0$ per $x \le 0$, $h(x) = x$ per $x > 0$.

Soluzione: Secondo quanto illustrato nell'Esempio 4.3, si trova $\sigma(T) = h([-1,1])$.
Quindi $\sigma(T) = [-2,2]$ nel caso a), e $\sigma(T) = [0,1]$ nel caso b).
Supponiamo λ sia un autovalore e f un'autofunzione, cioè

$$h(x)f(x) = \lambda f(x) \qquad \forall\, x \in [-1,1].$$

a) Sia $x_0 \in [-1,1]$. Supponiamo $f(x_0) \neq 0$.

f continua $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall_{\substack{x\in[-1,1],\\ |x-x_0|<\varepsilon}} : \quad f(x) \neq 0$

$\Rightarrow 2x = \lambda \quad \forall_{\substack{x\in[-1,1],\\ |x-x_0|<\varepsilon}} \quad \lightning$

$\Rightarrow f = 0$ su $[-1,1] \Rightarrow$ Non esiste nessun autovalore/autofunzione.

b) Come sopra con $x_0 \ge 0$ si vede che per ogni autofunzione f vale $f(x) = 0 \quad \forall\, 0 \le x \le 1$.
Viceversa, $f(x) = 0 \quad \forall\, 0 \le x \le 1$ implica $(Tf)(x) = h(x)f(x) = 0$.
$\Rightarrow \lambda = 0$ unico autovalore con $\ker T = \{f \in C([-1,1]) \mid f(x) = 0 \quad \forall\, 0 \le x \le 1\}$.

Esercizio 4.2 Sia $T \in \mathscr{L}(H)$. Dimostrare:

a) $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)} = \{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$.

b) T unitario $\Rightarrow \sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

Soluzione: a) Sia $\lambda \in \mathbb{C}$.

$\overline{\lambda}I - T^* = (\lambda I - T)^*$, $\lambda I - T = (\overline{\lambda}I - T^*)^*$

$\overset{\text{Teorema 1.5,}d)}{\Rightarrow} \overline{\lambda}I - T^*$ invertibile $\iff \lambda I - T$ invertibile

$\Rightarrow \lambda \in \rho(T) \iff \overline{\lambda} \in \rho(T^*)$

$\Rightarrow \lambda \in \sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T) \iff \overline{\lambda} \in \sigma(T^*) = \mathbb{C} \setminus \rho(T^*)$.

b) $T^*T = I \Rightarrow 1 = \|T^*T\| \overset{\text{Teorema 1.5,}e)}{=} \|T\|^2 \Rightarrow \|T\| = 1$

$\overset{\text{Teorema 4.2}}{\Rightarrow} \sigma(T) \subseteq \{\lambda \mid |\lambda| \le 1\}$.

Si ha anche

$TT^* = I \Rightarrow \lambda I - T = -T(I - \lambda T^*)$.

Ne segue

$|\lambda| < 1 \Rightarrow \|\lambda T^*\| = |\lambda|\|T^*\| = |\lambda|\|T\| < 1 \overset{\text{Teorema 3.1}}{\Rightarrow} (I - \lambda T^*)$ invertibile

$\Rightarrow \lambda I - T$ invertibile

$\Rightarrow \{\lambda \mid |\lambda| < 1\} \subseteq \rho(T) \Rightarrow \sigma(T) \subseteq \{\lambda \mid |\lambda| = 1\}$

Esercizio 4.3 Sia $T \in \mathscr{L}(\ell^2)$ con $T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$. Dimostrare che $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$ e che T non ha nessun autovalore.

Soluzione: Sappiamo che T^* è dato da $T^*(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$.

Esempio 4.4 $\Rightarrow \sigma(T^*) = \{\lambda \mid |\lambda| \leq 1\}$.

Esercizio 4.2 $\Rightarrow \sigma(T) = \sigma(T^{**}) = \{\bar{\lambda} \mid |\lambda| \leq 1\} = \{\lambda \mid |\lambda| \leq 1\}$.

$\ker T = \{0\} \Rightarrow \lambda = 0$ non è autovalore.

Sia $\lambda \neq 0$.

$Tx = \lambda x \iff (0, x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots) \iff x = 0$

$\Rightarrow \lambda$ non è autovalore.

Esercizio 4.4 Determinare autovalori, autofunzioni e risolvente degli operatori integrali in L^2 con nucleo k :

a) $k(x, y) = xy$ in $[0, 1]$,

b) $k(x, y) = xy + x^2y^2$ in $[-1, 1]$,

c) $k(x, y) = x - y$ in $[0, 1]$.

Trovare la soluzione f in L^2 della seguente equazione integrale:

d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin y f(y)\, dy - f(x) = x$ in $[0, 2\pi]$.

Soluzione: Seguire il procedimento riportato negli appunti. Nel seguito, T sia l'operatore integrale in L^2 con nucleo $k(x, y)$.

a) $k(x, y) = xy = r_1(x)\overline{s_1(y)}$ con $r_1(x) = s_1(x) = x$.
(Nota: $\overline{k(y, x)} = \overline{yx} = xy = k(x, y) \Rightarrow T$ autoaggiunto.)

$$\left.\begin{array}{l} \sigma(T) = \{0, (r_1, s_1)\} \\ (r_1, s_1) = \displaystyle\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma(T) = \left\{0, \tfrac{1}{3}\right\}.$$

$\ker T = \langle s_1(x) \rangle^\perp$, $\ker\left(\tfrac{1}{3} I - T\right) = \langle r_1(x) \rangle$.

$$[(\lambda I - T)^{-1}g](x) = \frac{g(x)}{\lambda} + \frac{x}{\lambda(\lambda - 1/3)} \int_0^1 g(y)y\,dy, \qquad \lambda \notin \sigma(T).$$

b) $k(x,y) = xy + x^2y^2 = r_1(x)\overline{s_1(y)} + r_2(x)\overline{s_2(y)}$

con $r_1(x) = s_1(x) = x$ e $r_2(x) = s_2(x) = x^2$.

(Nota: $\overline{k(y,x)} = \overline{yx + y^2x^2} = xy + x^2y^2 = k(x,y) \Rightarrow T$ autoaggiunto.)

$\ker T = \langle s_1(x), s_2(x)\rangle^\perp = \langle x, x^2\rangle^\perp$.

$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} (r_1,s_1) & (r_2,s_1) \\ (r_1,s_2) & (r_2,s_2) \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 2/5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow 2/3, 2/5$ autovalori di $\mathbf{T}$ con autospazi $\langle(1,0)\rangle$ e $\langle(0,1)\rangle$, rispettivamente

$\Rightarrow \sigma(T) = \{0, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}\}$.

$\ker(\frac{2}{3}I - T) = \langle 1r_1(x) + 0r_2(x)\rangle = \langle r_1(x)\rangle$,

$\ker(\frac{2}{5}I - T) = \langle 0r_1(x) + 1r_2(x)\rangle = \langle r_2(x)\rangle$.

$\begin{pmatrix} b_1(\lambda,g) \\ b_2(\lambda,g) \end{pmatrix} = (\lambda I - \mathbf{T})^{-1}\begin{pmatrix} (g,s_1) \\ (g,s_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/(\lambda - \frac{2}{3}) & 0 \\ 0 & 1/(\lambda - \frac{5}{2}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (g,s_1) \\ (g,s_2) \end{pmatrix}$,

$[(\lambda I - T)^{-1}g](x) = \dfrac{g(x)}{\lambda} + \dfrac{x}{\lambda(\lambda - \frac{2}{3})}\displaystyle\int_{-1}^1 g(y)y\,dy + \dfrac{x^2}{\lambda(\lambda - \frac{5}{2})}\displaystyle\int_{-1}^1 g(y)y^2\,dy.$

c) $k(x,y) = x - y = r_1(x)\overline{s_1(y)} + r_2(x)\overline{s_2(y)}$

con $r_1(x) = x$, $s_1(x) = r_2(x) = 1$ e $s_2(x) = -x$.

$\ker T = \langle s_1(x), s_2(x)\rangle^\perp = \langle 1, x\rangle^\perp$.

$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} (r_1,s_1) & (r_2,s_1) \\ (r_1,s_2) & (r_2,s_2) \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ -1/3 & -1/2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det(\lambda I - \mathbf{T}) = \lambda^2 - \text{traccia}(\mathbf{T})\lambda + \det\mathbf{T} = \lambda^2 + \frac{1}{12}$

$\Rightarrow -\frac{i}{\sqrt{12}}, \frac{i}{\sqrt{12}}$ autovalori di $\mathbf{T}$ con autospazi $\left\langle\left(1, \frac{i}{\sqrt{12}} - \frac{1}{2}\right)\right\rangle$ e $\left\langle\left(1, -\frac{i}{\sqrt{12}} - \frac{1}{2}\right)\right\rangle$

$\Rightarrow \sigma(T) = \{0, -\frac{i}{\sqrt{12}}, \frac{i}{\sqrt{12}}\}$.

$\ker(-\frac{i}{\sqrt{12}}I - T) = \left\langle 1r_1(x) + \left(\frac{i}{\sqrt{12}} - \frac{1}{2}\right)r_2(x)\right\rangle = \left\langle x + \frac{i}{\sqrt{12}} - \frac{1}{2}\right\rangle$,

$\ker(\frac{i}{\sqrt{12}}I - T) = \left\langle 1r_1(x) + \left(-\frac{i}{\sqrt{12}} - \frac{1}{2}\right)r_2(x)\right\rangle = \left\langle x - \frac{i}{\sqrt{12}} - \frac{1}{2}\right\rangle$.

$\begin{pmatrix} b_1(\lambda,g) \\ b_2(\lambda,g) \end{pmatrix} = (\lambda I - \mathbf{T})^{-1}\begin{pmatrix} (g,s_1) \\ (g,s_2) \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\lambda^2 + \frac{1}{12}}\begin{pmatrix} \lambda + \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{3} & \lambda - \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (g,s_1) \\ (g,s_2) \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}
&[(\lambda I - T)^{-1}g](x) = \\
&\quad = \frac{g(x)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\big[b_1(g,\lambda)r_1(x) + b_2(g,\lambda)r_2(x)\big] \\
&\quad = \frac{g(x)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda(\lambda^2 + \frac{1}{12})}\Big\{\Big[\Big(\lambda + \frac{1}{2}\Big)(g,s_1) + (g,s_2)\Big]x - \frac{1}{3}(g,s_1) + \Big(\lambda - \frac{1}{2}\Big)(g,s_2)\Big\}.
\end{aligned}$$

d) $k(x,y) = \sin y = r_1(x)\overline{s_1(y)}$ con $r_1(x) = 1$, $s_1(x) = \sin x$.

$(r_1, s_1) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin y\, dy = 0 \Rightarrow \sigma(T) = \{0\}$.

Si cerca la soluzione di $f(x) - (Tf)(x) = g(x)$ con $g(x) = -x$:

$(I - T)f = g \iff f - r_1(f, s_1) = g$

$(r_1, s_1) = 0 \Rightarrow (f, s_1) = (f, s_1) - (r_1, s_1)(f, s_1) = (g, s_1)$

$\Rightarrow f = g + r_1(g, s_1)$, cioè

$$f(x) = -x - \int_0^{2\pi} y \sin y\, dy = -x - \big(\sin y - y\cos y\big)\Big|_{y=0}^{y=2\pi} = 2\pi - x.$$

(In alternativa, si puó utilizzare la formula per la soluzione $(\lambda I - T)^{-1}g$ con $\lambda = 1$ e $g(x) = -x$.)

Esercizio 4.5 Siano $T \in \mathscr{L}(H)$ e $\lambda, \mu \in \rho(T)$. Dimostrare che

$$R(\mu, T) - R(\lambda, T) = (\lambda - \mu)R(\lambda, T)R(\mu, T).$$

Soluzione: $\lambda - \mu = (\lambda I - T) - (\mu I - T)$

$\Rightarrow R(\lambda, T)(\lambda - \mu) = R(\lambda, T)[(\lambda I - T) - (\mu I - T)] = I - R(\lambda, T)(\mu I - T)$

$\Rightarrow R(\lambda, T)(\lambda - \mu)R(\mu, T) = [I - R(\lambda, T)(\mu I - T)]R(\mu, T) = R(\mu, T) - R(\lambda, T)$.

Esercizio 4.6 Sia $T \in \mathscr{L}(H)$. Dimostrare che $\lambda \mapsto R(\lambda, T) : \rho(T) \to \mathscr{L}(H)$ è continua.

Soluzione: $\|(\lambda_k I - T) - (\lambda I - T)\| = \|(\lambda_k - \lambda)I\| = |\lambda_k - \lambda| \xrightarrow{k\to+\infty} 0$.

Continuitådell'inversione (Corollario 3.3) $\Rightarrow (\lambda_k I - T)^{-1} \xrightarrow{k\to+\infty} (\lambda I - T)^{-1}$.

Esercizio 4.7 Sia $T \in \mathscr{K}(H)$ autoaggiunto tale che $(Tx, x) \geq 0$ per ogni $x \in H$. Dimostrare che esiste un $S \in \mathscr{L}(H)$ tale che $S^2 = T$.

Soluzione: Teorema spettrale $\Rightarrow$ H ammette una base ortonormale $\{x_1, x_2, x_3 \ldots\}$ di autovettori di T. Sia $Tx_j = \lambda_j x_j$.

$0 \leq (Tx_j, x_j) = (\lambda_j x_j, x_j) = \lambda_j \|x_j\|^2 = \lambda_j \Rightarrow \lambda_j \geq 0$

$\Rightarrow$ ha senso definire $Sx := \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_j}(x, x_j)x_j, \quad x \in H.$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} |\sqrt{\lambda_j}(x, x_j)|^2 \leq (\max_j \lambda_j) \sum_{j=1}^{+\infty} |(x, x_j)|^2 \leq \|T\|\|x\|^2$$

$\Rightarrow Sx$ ben definita (serie convergente in H) e $\|Sx\|^2 \le \|T\|\|x\|^2 \quad \forall\, x \in H$

$\Rightarrow S \in \mathscr{L}(H)$ e $\|S\| \le \|T\|^{1/2}$.

$$(Sx, x_k) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_j}(x, x_j)(x_j, x_k) = \sqrt{\lambda_k}(x, x_k) \quad \forall\, k$$

$$\Rightarrow S(Sx) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_j}(Sx, x_j)x_j = \sum_{j=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_j}\sqrt{\lambda_j}(x, x_j)x_j = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j(x, x_j)x_j = Tx.$$

Esercizio 4.8 Sia $T \in \mathscr{K}(H)$ autoaggiunto e $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ base ortonormale di autovettori, $Tx_j = \lambda_j x_j$. Sia $\lambda \notin \sigma(T)$ e $y \in H$. Dimostrare che

$$(\lambda I - T)^{-1}y = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_j}(y, x_j)x_j = \frac{1}{\lambda}y + \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\lambda_j}{\lambda - \lambda_j}(y, x_j)x_j.$$

Soluzione: Definiamo $Sy = \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_j}(y, x_j)x_j, \quad y \in H.$

$0 \in \sigma(T) \Rightarrow \lambda \neq 0$.

$\sigma(T)$ ha nessun punto di accumulazione oppure 0 è l'unico punto di accumulazione.

$$\Rightarrow M := \sup_j \left|\frac{1}{\lambda - \lambda_j}\right| < +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{\lambda - \lambda_j}(y, x_j)\right|^2 \le M^2 \sum_{j=1}^{+\infty} |(y, x_j)|^2 = M^2\|y\|^2$$

$\Rightarrow$ La serie converge in H per ogni $y \in H$ e $\|Sy\| \le M\|y\|$.

$$\Rightarrow S \in \mathscr{L}(H) \text{ e } TSy = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_j}(y, x_j)Tx_j = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\lambda_j}{\lambda - \lambda_j}(y, x_j)x_j$$

$$\Rightarrow (\lambda I - T)Sy = \lambda Sy - TSy = \sum_{j=1}^{+\infty} \Big(\frac{\lambda}{\lambda - \lambda_j} - \frac{\lambda_j}{\lambda - \lambda_j}\Big)(y, x_j)x_j = \sum_{j=1}^{+\infty}(y, x_j)x_j = y \quad \forall\, y \in H.$$

$\Rightarrow (\lambda I - T)S = I$.

Analogamente $S(\lambda I - T) = I$.

La seconda formula segue immediatamente dal fatto che $\displaystyle\frac{1}{\lambda - \lambda_j} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\frac{\lambda_j}{\lambda - \lambda_j}$.

Esercizio 4.9 Sia K un operatore integrale con nucleo $k \in L^2(A \times A)$, cf. Esempio 2.5. Supponiamo che $k(s,t) = \overline{k(t,s)}$, quindi K è autoaggiunto. Sia $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ una base ortonormale di $L^2(A)$ di autofunzioni di K con $Ke_j = \lambda_j e_j$ per ogni j. Dimostrare che

$$\|k\|^2_{L^2(A\times A)} = \sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j|^2.$$

Soluzione: Utilizzando le notazioni dell'Esercizio 2.4, scegliendo, come è possibile, la base data da $f_{ij}(t,s) = e_i(t)\,\overline{e_j(s)}$, $i,j = 1,2,\ldots$, si ha $\|k\|^2_{L^2(A\times A)} = \sum_{i,j=1}^{+\infty} |(k, f_{ij})|^2$.

Dato che

$$\begin{aligned}(k, f_{ij}) &= \iint k(t,s)\overline{f_{ij}(t,s)}\,dtds = \iint k(t,s)\overline{e_i(t)}e_j(s)\,dtds \\ &= \int (Ke_j)(t)\overline{e_i(t)}\,dt = \lambda_j \int e_j(t)\overline{e_i(t)}\,dt = \lambda_j (e_j, e_i) = \delta_{ij}\lambda_j,\end{aligned}$$

concludiamo $\sum_{i,j=1}^{+\infty} |(k, f_{ij})|^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j|^2$.