Esercizi – Capitolo 6

Esercizio 6.1 *$f(x) = \ln|x|$ appartiene a $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Dimostrare che $(T_f)' = \mathrm{pv}\text{-}\frac{1}{x}$.*

Esercizio 6.2 *Siano $a \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ e $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Definiamo $aT : \mathscr{D}'(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ tramite*

$$(aT)(\phi) = T(a\phi), \qquad \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

a) Dimostrare che $aT \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

b) Dimostrare che $(aT)' = a'\,T + a\,T'$.

Esercizio 6.3 *Sia $P = b\frac{d}{dx} + c$ con $b \neq 0$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e y la soluzione dell'equazione $by' + cy = 0$ con $y(x_0) = 1/b$ e $f(x) := \begin{cases} 0 & : x < x_0 \\ y(x) & : x > x_0 \end{cases}$. Dimostrare che $PT_f = \delta_{x_0}$.*

Esercizio 6.4 *Risolvere le seguenti equazioni impulsive:*

a) $T'' + T = \delta_1$	*b)* $T'' - T' = \delta$	*c)* $T'' - 2T' + 2T = \delta$
d) $T'' + T' - 2T = \delta$	*e)* $T' - T = \delta + \delta_1$	*f)* $T'' + T = \delta + \delta_2$
g) $T'' - T' = \delta'$	*h)* $T'' + T' = \delta'$	*i)* $T'' + 9T' = \delta'$

Esercizio 6.5 *Sia $(T_k)_k \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ tale che $T_k \xrightarrow{k\to+\infty} T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e α un multiindice. Dimostrare che $\partial^\alpha T_k \xrightarrow{k\to+\infty} \partial^\alpha T$.*

Esercizio 6.6 *Siano $S, T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Dimostrare che*

$$(S+T)(\phi) := S(\phi) + T(\phi), \qquad (\alpha T)(\phi) := \alpha T(\phi), \qquad \phi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

definiscono distribuzioni $S + T$ e αT in $\mathscr{D}'(\Omega)$. Ovvero, $\mathscr{D}'(\Omega)$ è uno spazio vettoriale.

Esercizio 6.7 *Sia γ una curva regolare in $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che γ abbia una parametrizzazione r tale che $r^{-1}(K)$ è compatto per ogni $K \subset\subset \mathbb{R}^n$. Dimostrare che*

$$\delta_\gamma(\phi) := \int_\gamma \phi(x)\, ds, \qquad \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n),$$

definisce una distribuzione $\delta_\gamma \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Esercizio 6.8 *Sia $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da*

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1 > 0, \\ 0 & \text{se } x_1 < 0. \end{cases}$$

Determinare $\partial_1 T_u$ e $\partial_2 T_u$.

Esercizio 6.9 *Trovare una mappa lineare* $T \mapsto \overline{T} : \mathscr{D}'(\mathbb{R}) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ *tale che* $\overline{T_f} = T_{\overline{f}}$ *per ogni distribuzione regolare* T_f *(qui* $\overline{f}$ *è il complesso coniugato della funzione* f*).*

Esercizio 6.10 *Sia* $g(x) = e^x$ *e* $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$*. Trovare un'applicazione lineare*

$$T \mapsto T \circ g : \mathscr{D}'(\mathbb{R}_+) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R})$$

tale che $T_f \circ g = T_{f \circ g}$ *per ogni distribuzione regolare* $T_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$*.*

Suggerimento: *Scrivere* $T_{f \circ g}(\phi)$ *nella forma* $T_f(A(\phi))$ *con un'operatore opportuno* A*.*