

## Soluzioni esercizi – Capitolo 6

**Esercizio 6.1**  $f(x) = \ln|x|$  appartiene a  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ . Dimostrare che  $(T_f)' = \text{pv}\frac{1}{x}$ .

SOLUZIONE: Sia  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

$$f\phi \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow T_f(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} f(x)\phi(x) dx$$

Quindi

$$\begin{aligned} (T_f)'(\phi) &= -T_f(\phi') = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \ln|x| \phi'(x) dx \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( (\ln \varepsilon)\phi(-\varepsilon) - (\ln \varepsilon)\phi(\varepsilon) - \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{1}{x} \phi(x) dx \right). \end{aligned}$$

$$|\phi(-\varepsilon) - \phi(\varepsilon)| \leq 2\varepsilon \max_{-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon} |\phi'(x)| \leq 2\varepsilon \|\phi\|_1 \Rightarrow (\ln \varepsilon)(\phi(-\varepsilon) - \phi(\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

$$\Rightarrow (T_f)'(\phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\phi(x)}{x} dx = \text{pv}\frac{1}{x}(\phi).$$

**Esercizio 6.2** Siano  $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  e  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Definiamo  $aT : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  tramite

$$(aT)(\phi) = T(a\phi), \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

a) Dimostrare che  $aT \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

b) Dimostrare che  $(aT)' = a'T + aT'$ .

SOLUZIONE: a) Disuguaglianza di controllo (Teorema 6.9)  $\Rightarrow$

$$\forall K \subset\subset \Omega \quad \exists C = C(K) \quad \exists j = j(K) \quad \forall \substack{\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \\ \text{supp } \phi \subseteq K} : |T(\phi)| \leq C\|\phi\|_j.$$

$$\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow a\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ e } \text{supp } a\phi \subseteq \text{supp } \phi \Rightarrow$$

$$\forall K \subset\subset \Omega \quad \exists C = C(K) \quad \exists j = j(K) \quad \forall \substack{\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \\ \text{supp } \phi \subseteq K} : |(aT)(\phi)| \leq C\|a\phi\|_j.$$

Osserviamo

$$\begin{aligned} \|a\phi\|_j &= \max_{x \in \mathbb{R}, k \leq j} |(a\phi)^{(k)}(x)| \leq \max_{x \in \mathbb{R}, k \leq j} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} |a^{(k-i)}(x)| |\phi^{(i)}(x)| \\ &\leq \max_{x \in K, k \leq j} |a^{(k)}(x)| \|\phi\|_j \max_{k \leq j} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} = 2^j \max_{x \in K, k \leq j} |a^{(k)}(x)| \|\phi\|_j =: D_K \|\phi\|_j. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |(aT)(\phi)| = |T(a\phi)| \leq C\|a\phi\|_j \leq (CD_K)\|\phi\|_j = \tilde{C}_K \|\phi\|_j \quad \forall \substack{\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \\ \text{supp } \phi \subseteq K}.$$

Disuguaglianza di controllo (Teorema 6.9)  $\Rightarrow aT \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

b) Sia  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  arbitrario.

$$\begin{aligned}(aT)'(\phi) &= -(aT)(\phi') = -T(a\phi') = -T((a\phi)' - a'\phi) \\ &= -T((a\phi)') + T(a'\phi) = T'(a\phi) + T(a'\phi) \\ &= (aT')(\phi) + (a'T)(\phi) = (aT' + a'T)(\phi).\end{aligned}$$

**Esercizio 6.3** Sia  $P = b \frac{d}{dx} + c$  con  $b \neq 0$ . Sia  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $y$  la soluzione dell'equazione  $by' + cy = 0$  con  $y(x_0) = 1/b$  e  $f(x) := \begin{cases} 0 & : x < x_0 \\ y(x) & : x > x_0 \end{cases}$ . Dimostrare che  $PT_f = \delta_{x_0}$ .

SOLUZIONE: Teorema 6.19  $\Rightarrow (T_f)' = T_{f'} + y(x_0)\delta_{x_0}$

$$\Rightarrow PT_f = b(T_f)' + cT_f = T_{bf' + cf} + \delta_{x_0}$$

$$bf' + cf = \begin{cases} 0 & : x < x_0 \\ by'(x) + cy(x) & : x > x_0 \end{cases} = 0 \Rightarrow PT_f = \delta_{x_0}$$

**Esercizio 6.4** Risolvere le seguenti equazioni impulsive:

$$\begin{array}{lll} a) & T'' + T = \delta_1 & b) & T'' - T' = \delta & c) & T'' - 2T' + 2T = \delta \\ d) & T'' + T' - 2T = \delta & e) & T' - T = \delta + \delta_1 & f) & T'' + T = \delta + \delta_2 \\ g) & T'' - T' = \delta' & h) & T'' + T' = \delta' & i) & T'' + 9T' = \delta' \end{array}$$

SOLUZIONE: a)-d) : Si procede come discusso a lezione.

e) : Si risolvono separatamente  $T' - T = \delta$  e  $T' - T = \delta_1$ . La soluzione cercata è la somma delle due soluzioni.

f) : Analogamente ad e).

g) : Si risolve  $T' - T = \delta$ . Derivando membro a membro, si osserva che  $T$  è la soluzione dell'equazione proposta.

h), i) : Analogamente a g).

**Esercizio 6.5** Sia  $(T_k)_k \subset \mathcal{D}'(\Omega)$  tale che  $T_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  e  $\alpha$  un multiindice. Dimostrare che  $\partial^\alpha T_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \partial^\alpha T$ .

SOLUZIONE: Sia  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Si ha, per l'ipotesi  $T_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} T \Rightarrow T_k(\phi) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} T(\phi)$ ,

$$(\partial^\alpha T_k)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T_k(\partial^\alpha \phi) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \phi) = (\partial^\alpha T)(\phi).$$

Dato che  $\phi$  è arbitraria, concludiamo  $\partial^\alpha T_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \partial^\alpha T$ .

**Esercizio 6.6** Siano  $S, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Dimostrare che

$$(S + T)(\phi) := S(\phi) + T(\phi), \quad (\alpha T)(\phi) := \alpha T(\phi), \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

definiscono distribuzioni  $S + T$  e  $\alpha T$  in  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Ovvero,  $\mathcal{D}'(\Omega)$  è uno spazio vettoriale.

SOLUZIONE: Ovviamente  $S + T$  e  $\alpha T$  sono mappe lineari  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ .

Sia  $\phi_k \rightarrow \phi$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Allora

$$\begin{aligned} (S + T)(\phi_k) &= S(\phi_k) + T(\phi_k) \longrightarrow S(\phi) + T(\phi) = (S + T)(\phi), \\ (\alpha T)(\phi_k) &= \alpha T(\phi_k) \longrightarrow \alpha T(\phi) = (\alpha T)(\phi). \end{aligned}$$

**Esercizio 6.7** Sia  $\gamma$  una curva regolare in  $\mathbb{R}^n$ . Supponiamo che  $\gamma$  abbia una parametrizzazione  $r$  tale che  $r^{-1}(K)$  è compatto per ogni  $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ . Dimostrare che

$$\delta_\gamma(\phi) := \int_\gamma \phi(x) ds, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

definisce una distribuzione  $\delta_\gamma \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

SOLUZIONE: Sia  $K \subset\subset \mathbb{R}^n$  e  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  con  $\text{supp } \phi \subseteq K$ .

Ipotesi  $\Rightarrow r^{-1}(K)$  compatto.

$$\Rightarrow |\delta_\gamma(\phi)| = \left| \int_I \phi(r(t)) |r'(t)| dt \right| \leq \max_{x \in \mathbb{R}^n} |\phi(x)| \int_{r^{-1}(K)} |r'(t)| dt =: C_K \|\phi\|_0$$

Disuguaglianza di controllo  $\Rightarrow \delta_\gamma \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Esercizio 6.8** Sia  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $u(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1 > 0, \\ 0 & \text{se } x_1 < 0 \end{cases}$ .

Determinare  $\partial_1 T_u$  e  $\partial_2 T_u$ .

SOLUZIONE: Sia  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ . Troviamo

$$\begin{aligned} (\partial_2 T_u)(\phi) &= -T_u(\partial_2 \phi) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2) (\partial_2 \phi)(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= - \int_0^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_2 \phi)(x_1, x_2) dx_2 \right] dx_1 = - \int_0^{+\infty} \left[ \phi(x_1, x_2) \right]_{x_2=-\infty}^{+\infty} dx_1 \\ &= 0 \implies \partial_2 T_u = 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\partial_1 T_u)(\phi) &= -T_u(\partial_1 \phi) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2) (\partial_1 \phi)(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
&= - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} (\partial_1 \phi)(x_1, x_2) dx_1 \right] dx_2 = - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \phi(x_1, x_2) \right]_{x_1=0}^{+\infty} dx_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(0, x_2) dx_2 \implies \partial_1 T_u = \delta_\gamma,
\end{aligned}$$

con  $\gamma = O_{x_2} \equiv \{r : I = (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto r(t) = (0, t) \text{ (cfr. Esercizio 6.7)}\}$ .

**Esercizio 6.9** Trovare una mappa lineare  $T \mapsto \bar{T} : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  tale che  $\overline{T_f} = T_{\bar{f}}$  per ogni distribuzione regolare  $T_f$  (qui  $\bar{f}$  è il complesso coniugato della funzione  $f$ ).

SOLUZIONE: Per  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  vale

$$T_{\bar{f}}(\phi) = \int \overline{f(x)} \phi(x) dx = \overline{\int f(x) \overline{\phi(x)} dx} = \overline{T_f(\bar{\phi})}.$$

Sia  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Definiamo

$$\bar{T}(\phi) := \overline{T(\bar{\phi})}, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Ovviamente  $\bar{T} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  lineare.

Sia  $K \subset \subset \mathbb{R}$ . Esistono  $C \geq 0$  e  $k \in \mathbb{N}_0$  tali che

$$|T(\phi)| \leq C \|\phi\|_k \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \text{ supp } \phi \subseteq K.$$

Allora

$$|\bar{T}(\phi)| = |\overline{T(\bar{\phi})}| = |T(\bar{\phi})| \leq C \|\bar{\phi}\|_k = C \|\phi\|_k \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \text{ supp } \phi \subseteq K.$$

Disuguaglianza di controllo  $\Rightarrow \bar{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

**Esercizio 6.10** Sia  $g(x) = e^x$  e  $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ . Trovare un'applicazione lineare

$$T \mapsto T \circ g : \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

tale che  $T_f \circ g = T_{f \circ g}$  per ogni distribuzione regolare  $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ .

**Suggerimento:** Scrivere  $T_{f \circ g}(\phi)$  nella forma  $T_f(A(\phi))$  con un'operatore opportuno  $A$ .

SOLUZIONE: Sia  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$  e  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Allora

$$T_{f \circ g}(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^x) \phi(x) dx = \int_0^{+\infty} f(y) \frac{\phi(\ln y)}{y} dy = T_f(A(\phi)),$$

dove  $[A(\phi)](y) = \phi(\ln y)/y$ . Visto che

$$[A(\phi)](y) \neq 0 \iff \phi(\ln y) \neq 0 \iff y \in \{e^x \mid x \in \mathbb{R}, \phi(x) \neq 0\} = \exp(\{x \mid \phi(x) \neq 0\})$$

troviamo

$$\text{supp } A(\phi) = \exp(\text{supp } \phi) = g(\text{supp } \phi).$$

$\Rightarrow A : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$  (ovviamente  $A$  lineare).

Per  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$  definiamo

$$T \circ g : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \phi \mapsto (T \circ g)(\phi) := T(A(\phi)).$$

$\Rightarrow T \circ g : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  lineare.

$$K \subset\subset \mathbb{R} \Rightarrow K_g := g(K) \subset\subset \mathbb{R}_+.$$

Disuguaglianza di controllo (Teorema 6.9)  $\Rightarrow$

$$\exists C = C(K_g) = C(K), j = j(K_g) = j(K) \quad \forall_{\substack{\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \\ \text{supp } \phi \subseteq K}} : \quad |T(A(\phi))| \leq C \|A(\phi)\|_j.$$

Si osserva che

$$\frac{d^k}{dy^k} [A(\phi)](y) = \frac{1}{y^{k+1}} [a_{0k} \phi(\ln y) + a_{1k} \phi'(\ln y) + \dots + a_{kk} \phi^{(k)}(\ln y)]$$

con costanti universali  $a_{ik}$  che non dipendono da  $\phi$ .

$$\Rightarrow \exists D = D(j) \geq 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \quad \|A(\phi)\|_j \leq D \|\phi\|_j$$

$$\Rightarrow |(T \circ g)(\phi)| = |T(A(\phi))| \leq C \|A(\phi)\|_j \leq CD \|\phi\|_j \quad \forall_{\substack{\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \\ \text{supp } \phi \subseteq K}}$$

Disuguaglianza di controllo (Teorema 6.9)  $\Rightarrow T \circ g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$