Esercizi – Capitolo 7

Esercizio 7.1 *a) Sia* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *con* $f(x) = \sqrt{2\pi}e^{-|x|}$*. Verificare che* $\widehat{f}(\xi) = \dfrac{2}{1+\xi^2}$.

b) Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ *con* $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} & : |x| \le 1 \\ 0 & : \textit{altrimenti} \end{cases}$*. Verificare che* $\widehat{f}(\xi) = 2\dfrac{\sin\xi}{\xi}$.

Esercizio 7.2 *Dimostrare che, se* $c < (2\pi)^{-1/2}$*, la stima* $\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le c\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ *è falsa, fornendo un controesempio. Dunque,* $\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le (2\pi)^{-1/2}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ *è ottimale.*

Esercizio 7.3 *Sia* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *con* $f(x) = e^{-|x|^2/2}$*. Dimostrare che* $\widehat{f}(\xi) = e^{-|\xi|^2/2}$.
Suggerimento: *Usare* $x\xi = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$ *e* $f(x) = G(x_1)\cdot\ldots\cdot G(x_n)$ *con* $G(t) = e^{-t^2/2}$.

Esercizio 7.4 *Siano* $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$*,* $y \in \mathbb{R}^n$*,* A *una matrice* $n \times n$ *reale invertibile e* ${}^tA$ *la sua trasposta. Dimostrare:*

a) Se $v(x) = u(x-y) = (\tau_y u)(x)$ *allora* $\widehat{v}(\xi) = e^{-iy\cdot\xi}\widehat{u}(\xi)$.

b) Se $v(x) = e^{ix\cdot y}u(x)$ *allora* $\widehat{v}(\xi) = \widehat{u}(\xi - y) = (\tau_y\widehat{u})(\xi)$.

c) Se $v(x) = u(A^{-1}x)$ *allora* $\widehat{v}(\xi) = |\det A|\widehat{u}({}^tA\xi)$.

d) Se $v(x) = \overline{u(x)}$ *allora* $\widehat{v}(\xi) = \overline{\widehat{u}(-\xi)}$.

Ricordando che u *è radiale se* $u(x) = \varphi(|x|)$ *con* φ *funzione definita su* $[0, +\infty)$*, o, equivalentemente,* $u(x) = u(Ax)$ *per ogni matrice ortogonale* A*, dimostrare che*

e) Se u *è radiale allora* $\widehat{u}$ *è radiale.*

Esercizio 7.5 *Siano* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$*. Dimostrare:*

a) $\widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2}\widehat{f}\,\widehat{g}$

b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)g(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\widehat{g}(\xi)\,d\xi$

Suggerimento: *Si ricordi che* $e^{-ix\xi} = e^{-i(x-y)\xi}e^{-iy\xi}$.

Esercizio 7.6 *Sia* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*. Dimostrare:*

$$\widehat{\partial_{x_j} f}(\xi) = i\xi_j\widehat{f}(\xi), \qquad \partial_{\xi_j}\widehat{f}(\xi) = -i\,\widehat{x_j f}(\xi).$$

Nota: *Iterando queste formule si trova quindi*

$$\widehat{\partial_x^\alpha f}(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha\widehat{f}(\xi), \qquad \partial_\xi^\alpha\widehat{f}(\xi) = (-i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha f}(\xi),$$

per ogni multi-indice α.

Esercizio 7.7 *a) Calcolare* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{(\xi^2+1)^2}$. *b) Calcolare* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\xi}{\xi^2} d\xi$.

Suggerimento: *Usare l'Esercizio* 7.1 *e il Teorema di Plancherel.*

Esercizio 7.8 *Calcolare la trasformata di Fourier della funzione*

$$u(x) = \begin{cases} |x|^\alpha, & \textit{se } |x| < 1, \\ 0, & \textit{se } |x| > 1, \end{cases}$$

dove $\alpha > -3$, $x \in \mathbb{R}^3$, *così che* $u \in L^1(\mathbb{R}^3)$.