Soluzioni esercizi – Capitolo 7

Esercizio 7.1 a) Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ con $f(x) = \sqrt{2\pi}e^{-|x|}$. Verificare che $\widehat{f}(\xi) = \dfrac{2}{1+\xi^2}$.

b) Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ con $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} & : |x| \le 1 \\ 0 & : \text{altrimenti} \end{cases}$. Verificare che $\widehat{f}(\xi) = 2\dfrac{\sin\xi}{\xi}$.

Soluzione: a) Calcoliamo

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}e^{-|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-ix\xi}e^{x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-ix\xi}e^{-x}\,dx.$$

Dopo la sostituzione $y = -x$, $dy = -dx$, nel primo integrale, troviamo

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int_{0}^{+\infty} e^{-x}\left(e^{ix\xi} + e^{-ix\xi}\right)dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\cos(x\xi)\,dx \\ &= 2\lim_{b\to+\infty} \frac{-\cos(x\xi) + \xi\sin(x\xi)}{1+\xi^2}e^{-x}\Big|_{x=0}^{x=b} = \frac{2}{1+\xi^2}.\end{aligned}$$

b) Calcoliamo

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}\,dx \overset{\xi\neq 0}{=} \frac{1}{-i\xi}e^{-ix\xi}\Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{1}{\xi}\frac{e^{-i\xi}-e^{i\xi}}{-i} = \frac{2}{\xi}\frac{e^{i\xi}-e^{-i\xi}}{2i} = 2\frac{\sin\xi}{\xi}, \qquad \widehat{f}(0) = 2.$$

Esercizio 7.2 Dimostrare che, se $c < (2\pi)^{-1/2}$, la stima $\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le c\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ è falsa, fornendo un controesempio. Dunque, $\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le (2\pi)^{-1/2}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ è ottimale.

Soluzione: Detta f la funzione dell'Esercizio 7.1a, si trova $\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = f(0) = 2$ e $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-1}^{1}\sqrt{2\pi}\,dt = 2\sqrt{2\pi}$. Pertanto, $\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}} = 2 \le 2c\sqrt{2\pi} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}}$ è falsa se $c < (2\pi)^{-1/2}$. Ne segue che la costante che compare nella stima delle norme nell'enunciato del Lemma 7.1 è ottimale.

Esercizio 7.3 Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $f(x) = e^{-|x|^2/2}$. Dimostrare che $\widehat{f}(\xi) = e^{-|\xi|^2/2}$.
Suggerimento: Usare $x\xi = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$ e $f(x) = G(x_1)\cdot\ldots\cdot G(x_n)$ con $G(t) = e^{-t^2/2}$.

Soluzione: Si ha $f(x) = G(x_1)\cdot\ldots\cdot G(x_n)$ con $G(t) = e^{-t^2/2}$. Quindi, utilizzando ripetutamente il Teorema di Fubini-Tonelli e il Lemma 7.5,

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x_1\xi_1+\ldots+x_n\xi_n)}G(x_1)\cdot\ldots\cdot G(x_n)\,dx_1\ldots dx_n \\ &= \left[(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix_1\xi_1}G(x_1)\,dx_1\right]\cdot\ldots\cdot\left[(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix_n\xi_n}G(x_n)\,dx_n\right] \\ &= \widehat{G}(\xi_1)\cdot\ldots\cdot\widehat{G}(\xi_n) = e^{-\xi_1^2/2}\cdot\ldots\cdot e^{-\xi_n^2/2} = e^{-|\xi|^2/2}.\end{aligned}$$

Esercizio 7.4 Siano $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$, A una matrice $n \times n$ reale invertibile e ${}^tA$ la sua trasposta. Dimostrare che:

- se $v(x) = u(x-y) = (\tau_y u)(x)$ allora $\widehat{v}(\xi) = e^{-i\cdot y}\widehat{u}(\xi)$;
- se $v(x) = e^{ix\cdot y}u(x)$ allora $\widehat{v}(\xi) = \widehat{u}(\xi - y) = (\tau_y \widehat{u})(\xi)$;
- se $v(x) = u(A^{-1}x)$ allora $\widehat{v}(\xi) = |\det A|\widehat{u}({}^tA\xi)$;
- se $v(x) = \overline{u(x)}$ allora $\widehat{v}(\xi) = \overline{\widehat{u}(-\xi)}$.

Ricordando che u è radiale se $u(x) = \varphi(|x|)$ con φ funzione definita su $[0, +\infty)$, o, equivalentemente, $u(x) = u(Ax)$ per ogni matrice ortogonale A, dimostrare che

- se u è radiale allora $\widehat{u}$ è radiale.

Soluzione:

- $\widehat{v}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\displaystyle\int e^{-ix\xi}u(x-y)\,dx = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-i(z+y)\xi}u(z)\,dz =$
$= e^{-iy\xi}(2\pi)^{-n/2}\displaystyle\int e^{-iz\xi}u(z)\,dz = e^{-iy\xi}\widehat{u}(\xi)$;

- $\widehat{v}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\displaystyle\int e^{-ix\xi}e^{ixy}u(x)\,dx = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-ix(\xi-y)}u(z)\,dz = \widehat{u}(\xi - y) =$
$= (\tau_y\widehat{u})(\xi)$;

- $\widehat{v}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\displaystyle\int e^{-ix\xi}u(A^{-1}x)\,dx = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-i(Ay)\xi}u(y)|\det A|\,dy =$
$= |\det A|(2\pi)^{-n/2}\displaystyle\int e^{-iy({}^tA\xi)}u(y)\,dy = |\det A|\,\widehat{u}({}^tA\xi)$;

- $\widehat{v}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\displaystyle\int e^{-ix\xi}\overline{u}(x)\,dx = \overline{(2\pi)^{-n/2}\int e^{-ix(-\xi)}u(x)\,dx} = \overline{\widehat{u}(-\xi)} \Leftrightarrow \widehat{\overline{u}} = \overline{\widehat{\overline{\overline{u}}}}$;

- con una matrice $n \times n$ ortogonale $A \Rightarrow {}^tA = A^{-1} \Rightarrow |\det A| = 1$, ricordando che $u(Ax) = u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, troviamo
$\widehat{u}(A\xi) = (2\pi)^{-n/2}\displaystyle\int e^{-ix(A\xi)}u(x)\,dx = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-i({}^tAx)\xi}u(x)\,dx =$
$= (2\pi)^{-n/2}\displaystyle\int e^{-i(A^{-1}x)\xi}u(x)\,dx = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-iy\xi}u(Ay)|\det A|\,dy =$
$= (2\pi)^{-n/2}\displaystyle\int e^{-ix\xi}u(x)\,dx = \widehat{u}(\xi)$,
ovvero, $\widehat{u}$ è radiale.

Esercizio 7.5 Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dimostrare:

a) $\widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2} \widehat{f}\,\widehat{g}$

b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\widehat{g}(\xi)\, d\xi$

Suggerimento: Si ricordi che $e^{-ix\xi} = e^{-i(x-y)\xi} e^{-iy\xi}$.

Soluzione: Siccome $e^{-ix\xi} = e^{-i(x-y)\xi} e^{-iy\xi}$, utilizzando il teorema di Fubini-Tonelli ed un cambio di variabili (lineare), si ha

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix\xi} \Big(\int f(x-y) g(y)\, dy \Big)\, dx \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int e^{-iy\xi} g(y) \Big(\int e^{-i(x-y)\xi} f(x-y)\, dx \Big)\, dy \\
&= (2\pi)^{n/2} (2\pi)^{-n/2} \int e^{-iy\xi} g(y) \Big[(2\pi)^{-n/2} \int e^{-iz\xi} f(z)\, dz \Big]\, dy = (2\pi)^{n/2} \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

Utilizzando il teorema di Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}
\int \widehat{f}(\xi) g(\xi)\, d\xi &= \int \Big[(2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix\xi} f(x)\, dx \Big] g(\xi)\, d\xi \\
&= \int \Big[(2\pi)^{-n/2} \int e^{-i\xi x} g(\xi)\, d\xi \Big] f(x)\, dx = \int \widehat{g}(x) f(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Esercizio 7.6 Sia $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dimostrare:

$$\widehat{\partial_{x_j} f}(\xi) = i\xi_j \widehat{f}(\xi), \qquad \partial_{\xi_j} \widehat{f}(\xi) = -i\, \widehat{x_j f}(\xi).$$

Nota: Iterando queste formule si trova quindi

$$\widehat{\partial_x^\alpha f}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{f}(\xi), \qquad \partial_\xi^\alpha \widehat{f}(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha f}(\xi),$$

per ogni multi-indice α.

Soluzione: Utilizzando l'integrazione per parti, troviamo:

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial_{x_j} \varphi}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix\xi} (\partial_{x_j} \varphi)(x)\, dx = -(2\pi)^{-n/2} \int \big(\partial_{x_j} e^{-ix\xi} \big) \varphi(x)\, dx \\
&= i\xi_j (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix\xi} \varphi(x)\, dx = i\xi_j \widehat{\varphi}(\xi), \\
\partial_{\xi_j} \widehat{\varphi}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \partial_{\xi_j} \int e^{-ix\xi} \varphi(x)\, dx = (2\pi)^{-n/2} \int \big(\partial_{\xi_j} e^{-ix\xi} \big) \varphi(x)\, dx \\
&= -(2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix\xi} i x_j \varphi(x)\, dx = -i\widehat{x_j \varphi}(\xi).
\end{aligned}$$

Esercizio 7.7 Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{(\xi^2+1)^2}$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\xi}{\xi^2} d\xi$.

Suggerimento: Usare l'Esercizio 7.1 e il Teorema di Plancherel.

Soluzione: Sia f la funzione dell'Esercizio 7.1.a). Grazie al Teorema di Plancherel, si ha

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^2} &= \frac{1}{4}\|\widehat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{4}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi e^{-2|x|}\,dx \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-2|x|}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{-2|x|}\,dx\right) = \pi\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx = \pi\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Sia f la funzione dell'Esercizio 7.1.b). Grazie al Teorema di Plancherel, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\xi}{\xi^2}\,d\xi = \frac{1}{4}\|\widehat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{4}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} 2\pi\,dx = \pi.$$

Esercizio 7.8 Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$u(x) = \begin{cases} |x|^\alpha, & \text{se } |x| < 1, \\ 0, & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

dove $\alpha > -3$, $x \in \mathbb{R}^3$, così che $u \in L^1(\mathbb{R}^3)$.

Soluzione: Posto $x_1 = \rho\cos\theta\cos\varphi$, $x_2 = \rho\cos\theta\sin\varphi$, $x_3 = \rho\sin\theta$, $\rho \in [0,+\infty)$, $\varphi \in [0,2\pi]$, $\theta \in [-\pi/2,\pi/2]$, si ha $dx = dx_1dx_2dx_3 = \rho^2\cos\theta\,d\rho d\varphi d\theta$ e

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathbb{R}^3} |u| &= \iiint_{B_1(0)} |x|^\alpha\,dx = \int_{\rho=0}^{1}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^\alpha\rho^2\cos\theta\,d\rho d\varphi d\theta = 4\pi\lim_{a\to 0^+}\left[\frac{\rho^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right]_{\rho=a}^{1} \\ &= \frac{4\pi}{\alpha+3}(1-\underbrace{\lim_{a\to 0^+} a^{\alpha+3}}_{=0\Leftarrow\alpha+3>0}) = \frac{4\pi}{\alpha+3} < +\infty,\end{aligned}$$

quindi $u \in L^1(\mathbb{R}^3)$, come affermato. Dall'Esercizio 7.6, dato che u è radiale, segue che $\widehat{u}$ è radiale. Dunque, denotata con (e_1,e_2,e_3) la base canonica di $\mathbb{R}^3$, usando coordinate polari sferiche come sopra, troviamo, per $\xi \neq 0$,

$$
\begin{aligned}
\widehat{u}(\xi) = u(|\xi| e_3) &= (2\pi)^{-3/2} \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-i|\xi| x e_3} u(x)\, dx = (2\pi)^{-3/2} \iiint_{B_1(0)} e^{-i|\xi| x_3} |x|^\alpha \, dx \\
&= (2\pi)^{-3/2} \int_{\rho=0}^{1} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-i|\xi|\rho \sin\theta} \rho^\alpha \rho^2 \cos\theta \, d\rho d\varphi d\theta \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int_{\rho=0}^{1} \left[\frac{e^{-i|\xi|\rho\sin\theta}}{-i|\xi|} \right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^{\alpha+1} \, d\rho = 2(2\pi)^{-1/2} |\xi|^{-1} \int_{\rho=0}^{1} \frac{e^{i\rho|\xi|} - e^{-i\rho|\xi|}}{2i} \rho^{\alpha+1} \, d\rho \\
&= 2(2\pi)^{-1/2} |\xi|^{-1} \int_{\rho=0}^{1} \rho^{\alpha+1} \sin(\rho|\xi|) \, d\rho = 2(2\pi)^{-1/2} |\xi|^{-\alpha-3} \int_0^{|\xi|} t^{\alpha+1} \sin t \, dt.
\end{aligned}
$$

Osserviamo che l'integrale ottenuto nell'ultimo passaggio è convergente, dato che $t^{\alpha+1}\sin t \sim t^{\alpha+2}$, $t \to 0^+$ e $\alpha + 2 > -1$. Abbiamo quindi, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^3$, $\xi \neq 0$,

$$
\widehat{u}(\xi) = \widehat{u}(|\xi|) = 2(2\pi)^{-1/2} |\xi|^{-\alpha-3} \int_0^{|\xi|} t^{\alpha+1} \sin t \, dt.
$$