Università degli Studi di Torino
Corso di Laurea Magistrale in Matematica
A.A. 2025-2026

Istituzioni di Analisi Matematica (Seconda parte)

S. Coriasco, J. Seiler

0 Richiami sugli operatori limitati

Denotiamo con X, Y, Z degli spazi di Banach complessi, con H, H_1, H_2 degli spazi di Hilbert complessi separabili (cioè con base ortonormale numerabile).

Per un operatore lineare $T : X \to Y$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- T è continuo in X (cioè in ogni punto $x \in X$).
- T è continuo in $x = 0$.
- T è limitato, cioè: $\quad \exists\, M \geqslant 0 \quad \forall\, x \in X : \quad \|Tx\|_Y \leqslant M\|x\|_X$.
- Se $B = \{x \in X \mid \|x\|_X \leqslant 1\}$, allora $T(B) \subseteq Y$ è limitato.

Scriviamo

$$\boxed{\mathscr{L}(X,Y) := \{T : X \to Y \mid T \text{ lineare e limitato}\}, \qquad \mathscr{L}(X) := \mathscr{L}(X,X).}$$

Si ricorda che $X' = \mathscr{L}(X,\mathbb{C})$ (spazio duale di X).

$\mathscr{L}(X,Y)$ è uno spazio di Banach con norma

$$\boxed{\|T\| = \|T\|_{\mathscr{L}(X,Y)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y.}$$

La composizione ST di $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ e $S \in \mathscr{L}(Y,Z)$ appartiene a $\mathscr{L}(X,Z)$ e

$$\boxed{\|ST\|_{\mathscr{L}(X,Z)} \leqslant \|S\|_{\mathscr{L}(Y,Z)} \|T\|_{\mathscr{L}(X,Y)}.}$$

Il nucleo, rispettivamente l'immagine di $T \in \mathscr{L}(X,Y)$, sono

$$\boxed{\ker T = \{x \in X \mid Tx = 0\}, \qquad \operatorname{im} T = \{y \in Y \mid \exists\, x \in X : \ y = Tx\}.}$$

Si ricorda che T è iniettivo se e solo se $\ker T = \{0\}$.

0.1 Teorema (di Banach)**.** *Sia $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ biettivo. Allora $T^{-1} \in \mathscr{L}(Y,X)$. Si chiama T^{-1} l'inversa di T e T si dice invertibile.*

0.2 Teorema (di Riesz-Fréchet)**.** *Sia $x' \in H' = \mathscr{L}(H,\mathbb{C})$ un funzionale. Allora esiste un unico $y = y(x') \in H$ tale che*

$$x'(x) = (x,y) \qquad \forall\, x \in H.$$

Vale $\|y\| = \|x'\|$. L'applicazione $x' \mapsto y(x') : H' \to H$ è antilineare e biettiva.

La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e il Teorema di Hahn-Banach implicano

$$\boxed{\|x\|_H = \sup_{\|y\|_H = 1} |(x,y)_H|, \qquad \|x\|_X = \sup_{\|x'\|_{X'} = 1} |x'(x)|.}$$

1 L'operatore aggiunto

Di cosa si tratta? In analisi funzionale, l'*aggiunto* di un operatore, chiamato anche *operatore hermitiano aggiunto*, generalizza il trasposto coniugato di una matrice quadrata al caso infinito dimensionale e il concetto di complesso coniugato di un numero complesso. Ogni operatore lineare limitato su uno spazio di Hilbert ha un corrispondente operatore aggiunto.

1.1 Definizione e proprietà fondamentali

1.1 Teorema. *$T \in \mathscr{L}(H_1, H_2) \Rightarrow$ Esiste un unico $T^* \in \mathscr{L}(H_2, H_1)$ tale che*

$$(Tx, y)_{H_2} = (x, T^*y)_{H_1} \qquad \forall\, x \in H_1 \quad \forall\, y \in H_2.$$

T^* si dice l'operatore aggiunto di T.

Dimostrazione. Sia $y \in H_2$ e $\phi_y x := (Tx, y)_{H_2}$.

$$|\phi_y x| = |(Tx, y)_{H_2}| \leqslant \|Tx\|_{H_2}\|y\|_{H_2} \leqslant \|T\|_{\mathscr{L}(H_1,H_2)}\|y\|_{H_2}\|x\|_{H_1} \quad \forall\, x \in H_1.$$

$\Rightarrow \phi_y \in H_1'$, $\|\phi_y\| \leqslant \|T\|_{\mathscr{L}(H_1,H_2)}\|y\|_{H_2}$.

Teorema di Riesz $\Rightarrow \exists!\ \hat{y} = \hat{y}(y) \in H_1 \quad \forall\, x \in H_1 : \quad \phi_y x = (x, \hat{y})_{H_1}, \quad \|\hat{y}\|_{H_1} = \|\phi_y\|$.

Definire $T^* : H_2 \to H_1$, $T^*y = \hat{y}(y)$.

T^* è lineare:

$$\begin{aligned}(z, T^*(\lambda x + y))_{H_1} &= (Tz, \lambda x + y)_{H_2} = \overline{\lambda}(Tz, x)_{H_2} + (Tz, y)_{H_2} \\ &= (z, \lambda T^*x)_{H_1} + (z, T^*y)_{H_1} = (z, \lambda T^*x + T^*y)_{H_1} \qquad \forall\, z \in H_1\end{aligned}$$

$\Rightarrow T^*(\lambda x + y) = \lambda T^*x + T^*y$.

T^* è limitato:

$$\|T^*y\|_{H_1} = \|\hat{y}(y)\|_{H_1} = \|\phi_y\| \leqslant \|T\|_{\mathscr{L}(H_1,H_2)}\|y\|_{H_2} \qquad \forall\, y \in H_2.$$

$\Rightarrow \|T^*\|_{\mathscr{L}(H_2,H_1)} \leqslant \|T\|_{\mathscr{L}(H_1,H_2)}$. ∎

1.2 Esempio. *Siano $H = \ell^2(\mathbb{N})$ e $L, R \in \mathscr{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ con*

$$\begin{aligned}L(x_1, x_2, x_3, \ldots) &= (x_2, x_3, x_4 \ldots) \qquad (\text{"left shift"}),\\ R(x_1, x_2, x_3, \ldots) &= (0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \qquad (\text{"right shift"}).\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}(L(x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2 \ldots)) &= ((x_2, x_3, \ldots), (y_1, y_2 \ldots)) = x_2y_1 + x_3y_2 + \ldots \\ &= ((x_1, x_2, \ldots), (0, y_1, \ldots)) = ((x_1, x_2, \ldots), R(y_1, y_2 \ldots)),\end{aligned}$$

$\Rightarrow L^* = R$. Analogamente: $R^* = L$.

1.3 Esempio. *Per* $f \in L^2([1,2])$ *definiamo*

$$(Tf)(x) = f(\sqrt{x}), \qquad 1 \leqslant x \leqslant 4.$$

Definisce $T : L^2([1,2]) \to L^2([1,4])$ *limitato con* $\|T\| \leqslant 2$*:*

$$\|Tf\|^2_{L^2([1,4])} = \int_1^4 |f(\sqrt{x})|^2 \, dx \overset{y=\sqrt{x}}{=} \int_1^2 |f(y)|^2 2y \, dy \leqslant 4\|f\|^2_{L^2([1,2])}.$$

Determiniamo T^**:*

$$(Tf, g) = \int_1^4 f(\sqrt{x})\overline{g(x)} \, dx \overset{y=\sqrt{x}}{=} \int_1^2 f(y)\overline{g(y^2)2y} \, dy = (f, T^*g),$$

dove T^*g*,* $g \in L^2([1,2])$ *definito da*

$$(T^*g)(y) = 2yg(y^2), \qquad 1 \leqslant y \leqslant 2.$$

1.4 Esempio. *Siano* $U \subset \mathbb{R}^n$*,* $V \subset \mathbb{R}^m$ *e* $k : U \times V \to \mathbb{C}$ *misurabili. L'operatore integrale* T *su* V *con nucleo integrale* k *associa a funzioni* $f : V \to \mathbb{C}$ *la funzione* $Tf : U \to \mathbb{C}$ *tramite*

$$\boxed{(Tf)(u) = \int_V k(u,v) f(v) \, dv, \qquad u \in U.}$$

Supponiamo che esistono $c_1, c_2 \geqslant 0$ *tale che*

$$\int_U |k(u,v)| \, du \leqslant c_1, \quad \int_V |k(u,v)| \, dv \leqslant c_2 \qquad \text{quasi ovunque.}$$

Allora $T \in \mathscr{L}(L^2(V), L^2(U))$ *con* $\|T\| \leqslant \sqrt{c_1 c_2}$ *("Lemma di Schur"). L'operatore aggiunto* T^* *è l'operatore integrale con nucleo* $k^{(*)}(v,u) := \overline{k(u,v)}$*, cioè*

$$\boxed{(T^*g)(v) = \int_U \overline{k(u,v)} g(u) \, du, \qquad v \in V.}$$

In fatti, sfruttando le ipotesi, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz ed il Teorema di Fubini-Tonelli, si trova:

$$\begin{aligned}
|(Tf)(u)|^2 &= \left| \int_V k(u,v) f(v) \, dv \right|^2 \leqslant \left[\int_V |k(u,v)|^{\frac{1}{2}} \, |k(u,v)|^{\frac{1}{2}} \, |f(v)| \, dv \right]^2 \\
&\leqslant \left(\int_V |k(u,v)| \, dv \right) \cdot \left[\int_V |k(u,v)| \, |f(v)|^2 \, dv \right] \\
&\leqslant c_2 \int_V |k(u,v)| \, |f(v)|^2 \, dv \\
\Rightarrow \|Tf\|^2_{L^2(U)} &\leqslant c_2 \int_{U \times V} |k(u,v)| \, |f(v)|^2 \, dv du \leqslant c_1 \, c_2 \int_V |f(v)|^2 \, dv \\
&= c_1 \, c_2 \, \|f\|^2_{L^2(V)}.
\end{aligned}$$

La seconda affermazione è una conseguenza immediata della definizione di operatore aggiunto e del Teorema di Fubini-Tonelli. Infatti, per ogni $f \in L^2(V)$, $g \in L^2(U)$, si ha

$$\begin{aligned}(Tf, g)_{L^2(U)} &= \int_U \left[\int_V k(u,v)\, f(v)\, dv\right] \overline{g(u)}\, du \\ &= \int_{U\times V} k(u,v)\, f(v)\, \overline{g(u)}\, dvdu \\ &= \int_V f(v) \overline{\left[\int_U \overline{k(u,v)}\, g(u)\, du\right]} dv = (f, T^* g)_{L^2(V)},\end{aligned}$$

con

$$(T^* g)(v) = \int_U \overline{k(u,v)}\, g(u)\, du = \int_U k^{(*)}(v,u)\, g(u)\, du.$$

1.5 Teorema. *Siano $S, T \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$, $R \in \mathscr{L}(H_2, H_3)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Allora valgono:*

a) $(T+S)^* = T^* + S^*$, $(\lambda T)^* = \overline{\lambda}\, T^*$ *(cioè la mappa $T \mapsto T^*$ è anti-lineare).*

b) $(RT)^* = T^* R^*$

c) $(T^*)^* = T$

d) *T invertibile $\iff$ T^* invertibile. In questo caso:* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

e) $\|T^*\| = \|T\| = \|T^*T\|^{1/2}$ *(in particolare, la mappa $T \mapsto T^*$ è continua).*

Dimostrazione. a) $((\lambda T + S)x, y) = \lambda(Tx, y) + (Sx, y) = \lambda(x, T^*y) + (x, S^*y)$
$= (x, \bar{\lambda} T^* y + S^* y) = (x, (\overline{\lambda} T^* + S^*)y)$.

b) $(RTx, y) = (R(Tx), y) = (Tx, R^*y) = (x, T^*R^*y) = (x, (RT)^*y)$.

c) $(T^*x, y) = \overline{(y, T^*x)} = \overline{(Ty, x)} = (x, Ty) = (x, (T^*)^*y)$.

d) "$\Rightarrow$": $I = TT^{-1} \overset{b)}{\Rightarrow} I = I^* = (T^{-1})^* T^*$, $I = T^{-1}T \overset{b)}{\Rightarrow} I = I^* = T^*(T^{-1})^*$
$\Rightarrow (T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

"$\Leftarrow$": Applicare "$\Rightarrow$" a T^*, notando che $(T_*)_* = T$.

e) Sappiamo $\|T^*\| \leqslant \|T\|$.

$\Rightarrow \|T\| \overset{c)}{=} \|(T^*)^*\| \leqslant \|T^*\| \Rightarrow \|T\| = \|T^*\|$.

$\|T^*T\| \leqslant \|T\|\|T^*\| = \|T\|^2 \Rightarrow \|T^*T\|^{1/2} \leqslant \|T\|$.

$$\|Tx\|^2 = |(Tx, Tx)| = |(T^*Tx, x)| \leqslant \|T^*Tx\|\|x\| \leqslant \|T^*T\|\|x\|^2 \qquad \forall\, x \in H$$

$\Rightarrow \|Tx\| \leqslant \|T^*T\|^{1/2}\|x\|\ \forall\, x \Rightarrow \|T\| \leqslant \|T^*T\|^{1/2}$. ∎

1.2 Operatori autoaggiunti

1.6 Definizione. *Un operatore $T \in \mathscr{L}(H)$ si dice autoaggiunto se $T = T^*$, si dice normale se $T^*T = TT^*$, si dice unitario se T è invertibile e $T^{-1} = T^*$.*

1.7 Lemma. *Sia $T \in \mathscr{L}(H)$. Allora:*

a) $\ker T = \ker(T^*T)$, *b)* T *normale* $\Rightarrow \ker T = \ker T^*$.

Dimostrazione. a) $x \in \ker T \Rightarrow T^*Tx = T^*(Tx) = 0 \Rightarrow x \in \ker T^*T$,
$x \in \ker T^*T \Rightarrow (T^*Tx, x) = 0 \Rightarrow \|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = 0 \Rightarrow Tx = 0 \Rightarrow x \in \ker T$.
b) $\ker T \overset{a)}{=} \ker T^*T \overset{\text{hyp}}{=} \ker TT^* \overset{\text{Teorema 1.5,c)}}{=} \ker (T^*)^* T^* \overset{a)}{=} \ker T^*$. ■

1.8 Teorema. *Sia $T \in \mathscr{L}(H)$ autoaggiunto. Allora $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)|$.*

Dimostrazione. Prima notiamo che, per ogni $T \in \mathscr{L}(H)$, vale

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(Tx, y)|. \tag{$*$}$$

Quindi $s(T) := \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)| \leqslant \|T\|$.

Siano $x, y, z \in H$ arbitrari tali che $\|x\| = \|y\| = 1$. Valgono

$$\begin{aligned}(T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y) &= 2\big[(Tx, y) + (Ty, x)\big] \\ &= 2\big[(Tx, y) + \overline{(Tx, y)}\big] = 4\mathrm{Re}\,(Tx, y)\end{aligned}$$

e

$$|(Tz, z)| = \left|\left(T\frac{z}{\|z\|}, \frac{z}{\|z\|}\right)\right| \|z\|^2 \leqslant s(T)\|z\|^2.$$

Legge del parallelogramma $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}4\mathrm{Re}\,(Tx, y) &\leqslant |(T(x+y), x+y)| + |(T(x-y), x-y)| \\ &\leqslant s(T)\big(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\big) = 2s(T)\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) = 4s(T).\end{aligned}$$

$\exists\, \phi = \phi(x, y) \in \mathbb{R}: \quad |(Tx, y)| = e^{i\phi}(Tx, y) = (T(e^{i\phi}x), y)$
$\|e^{i\phi}x\| = \|x\| = 1 \Rightarrow |(Tx, y)| = \mathrm{Re}\,(T(e^{i\phi}x), y) \leqslant s(T)$
$(*) \Rightarrow \|T\| \leqslant s(T)$. ■

1.9 Corollario. *$T = T^* \in \mathscr{L}(H) \Rightarrow T$ è determinato dai valori (Tx, x), $x \in H$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $S \in \mathscr{L}(H)$ autoaggiunto con $(Sx, x) = (Tx, x) \quad \forall\, x \in H$.

$\Rightarrow R := S - T$ autoaggiunto e $(Rx, x) = 0 \quad \forall\, x \in H$.

Teorema 1.8 $\Rightarrow R = 0$. ∎

1.10 Teorema. *Sia $T \in \mathscr{L}(H)$. Allora:*

$$T \text{ autoaggiunto} \iff (Tx, x) \in \mathbb{R} \qquad \forall\, x \in H.$$

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$": $(Tx, x) = (x, Tx) = \overline{(Tx, x)} \Rightarrow (Tx, x) \in \mathbb{R}$.

"$\Leftarrow$": Siano $\alpha \in \mathbb{C}$ e $x, y \in H$.

$$\begin{aligned}(Tx,x)+&\alpha(Ty,x) + \overline{\alpha}(Tx,y) + |\alpha|^2(Ty,y)\\ &= (T(x+\alpha y), x+\alpha y)\\ &= \overline{(T(x+\alpha y), x+\alpha y)}\\ &= (Tx,x) + \alpha(y,Tx) + \overline{\alpha}(x,Ty) + |\alpha|^2(Ty,y)\end{aligned}$$

$\alpha = 1 \Rightarrow (1) \;\; (Ty, x) + (Tx, y) = (y, Tx) + (x, Ty)$

$\alpha = i \Rightarrow (2) \;\; i(Ty, x) - i(Tx, y) = i(y, Tx) - i(x, Ty)$

$(1) + i(2) \Rightarrow (Tx, y) = (x, Ty)$ ∎

1.3 Sottospazi complementari e proiezioni ortogonali

Siano M, N due sottospazi di H. Il complementare ortogonale di M è

$$\boxed{M^\perp = \{x \in H \mid x \perp M\} = \{x \in H \mid (x, m) = 0 \quad \forall\, m \in M\}.}$$

Scriviamo

$$\boxed{H = M \oplus N :\iff H = M + N, \quad M \cap N = \{0\}, \quad M, N \text{ chiusi.}}$$

Si ricordi (prima parte): $M^\perp$ è chiuso, $M^\perp = \overline{M}^\perp$ e sottospazi di dimensione finita sono chiusi. Inoltre, $H = M \oplus M^\perp$ se M è chiuso, e vale il Teorema di Pitagora:

$$\boxed{x \perp y \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.}$$

1.11 Lemma. *Sia $H = M + N$ con due sottospazi M, N. Sia $(y, z) = 0$ per ogni $y \in M$, $z \in N$. Allora $N = M^\perp$ e $H = M \oplus M^\perp$ (i.e., M è chiuso).*

DIMOSTRAZIONE. Ipotesi $\Rightarrow N \subseteq M^\perp$. Sia $x \in M^\perp$ e poniamo, come è possibile per le ipotesi, $x = y + z$ con $y \in M$, $z \in N$. Troviamo:

$x = y + z \in M^\perp \Rightarrow 0 = (y, x) = (y, y + z) = (y, y) + (y, z) = \|y\|^2 \Rightarrow x = z \in N$

$\Rightarrow M^\perp \subseteq N \Rightarrow N = M^\perp$ ed N è chiuso.

Scambiando i ruoli di M e N si ottiene $M = N^\perp$ ed M è chiuso. ∎

1.12 Corollario. *Sia M sottospazio di H. Allora $M^{\perp\perp} := (M^\perp)^\perp = \overline{M}$.*

DIMOSTRAZIONE. $H = \overline{M} \oplus \overline{M}^\perp = \overline{M} \oplus M^\perp \overset{1.11}{\Rightarrow} \overline{M} = (M^\perp)^\perp$. ∎

1.13 Lemma. $T \in \mathscr{L}(H) \Rightarrow (\operatorname{im} T)^\perp = \ker T^*$ *e* $(\ker T)^\perp = \overline{\operatorname{im} T^*}$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\begin{aligned} x \in \ker T^* &\iff T^*x = 0 \iff (T^*x, y) = 0 \quad \forall\, y \in H \\ &\iff (x, Ty) = 0 \quad \forall\, y \in H \\ &\iff x \perp Ty \quad \forall\, y \in H \iff x \in (\operatorname{im} T)^\perp. \end{aligned}$$

Inoltre: $\ker T = \ker T^{**} = (\operatorname{im} T^*)^\perp \Rightarrow (\ker T)^\perp = (\operatorname{im} T^*)^{\perp\perp} = ((\overline{\operatorname{im} T^*})^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{im} T^*}$. ∎

1.14 Definizione. *Sia M uno sottospazio chiuso. L'operatore $P_M : H \to H$ definito da*

$$P_M x = y, \qquad x = y + z \in M \oplus M^\perp,$$

si dice proiezione ortogonale su M.

1.15 Teorema. *Sia $P \in \mathscr{L}(H)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) *P è una proiezione ortogonale, cioè $\exists M \subseteq H$ sottospazio chiuso: $P = P_M$;*

(2) *$P = P^* = P^2$;*

(3) *$P^2 = P$ e $(Px, x) \geqslant 0$ per ogni $x \in H$.*

DIMOSTRAZIONE. $(\mathbf{1}) \Rightarrow (\mathbf{2})$: Sia $x = y + z$ con $y \in M, z \in M^\perp$.
$\Rightarrow Px = y \Rightarrow P^2x = Py = y = Px$.
Sia $x' = y' + z'$ con $y' \in M, z' \in M^\perp$.

$$\Rightarrow \begin{cases} (Px, x') = (y, y' + z') = (y, y') + (y, z') = (y, y'), \\ (x, Px') = (y + z, y') = (y, y') + (z, y') = (y, y'). \end{cases} \quad \Rightarrow P = P^*$$

$(\mathbf{2}) \Rightarrow (\mathbf{3})$: $(Px, x) = (P^2x, x) = (Px, P^*x) = (Px, Px) = \|Px\|^2 \geqslant 0$.
$(\mathbf{3}) \Rightarrow (\mathbf{1})$: Siano $M := \operatorname{im} P$ e $N := \ker P$.

i) $x \in H \Rightarrow P(x - Px) = Px - Px = 0 \Rightarrow x = Px + (x - Px) \in M + N \Rightarrow H = M + N$

ii) Siano $y \in M$ e $z \in N$. Supponiamo $\alpha := (y, z) \neq 0$. Sia $z' = -\frac{2}{\alpha}\|y\|^2 z \Rightarrow$

$$0 \leqslant (P(y + z'), y + z') = (y, y) + (y, z') = \|y\|^2 - \frac{2}{\alpha}\|y\|^2(y, z) = -\|y\|^2 \quad \lightning$$

Lemma 1.11 $\Rightarrow$ (1), cioè, $H = M \oplus M^{\perp} = N \oplus N^{\perp}$ e $P = P_M$. ∎

La dimostrazione mostra che per $P = P_M$ vale

$$\boxed{M = \operatorname{im} P, \qquad M^{\perp} = \ker P = \operatorname{im}(1-P), \qquad H = \operatorname{im} P \oplus \ker P.}$$

Inoltre,

$$\|P\| = \|P^2\| = \|PP^*\| = \|P\|^2$$

implica che $\|P\| = 1$ oppure $P = 0$ (cioè $M = \{0\}$).

1.4 Esercizi

Esercizio 1.1. *Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice invertibile. Per funzioni $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ definiamo*

$$(Tf)(x) = f(Ax), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dimostrare che $T \in \mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ e determinare l'aggiunto di T.

Esercizio 1.2. *Sia $T \in \mathscr{L}(H)$. Dimostrare:*

$$T \text{ normale} \iff \|Tx\| = \|T^*x\| \quad \forall\, x \in H.$$

Esercizio 1.3. *Sia $T \in \mathscr{L}(H)$. Dimostrare:*

$$T \text{ è suriettivo} \iff T^* \text{ è iniettivo e } \operatorname{im} T \text{ è chiuso.}$$

Esercizio 1.4. *Siano $P, Q \in \mathscr{L}(H)$ due proiezioni ortogonali. Dimostrare:*

$$PQ \text{ proiezione ortogonale} \iff PQ = QP.$$

In questo caso, PQ è la proiezione ortogonale su $\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q$.

Esercizio 1.5. *Siano $P, Q \in \mathscr{L}(H)$ due proiezioni ortogonali. Dimostrare:*

$$\operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} Q \iff \|Px\| \leqslant \|Qx\| \qquad \forall\, x \in H.$$

Esercizio 1.6. *Siano $P, Q \in \mathscr{L}(H)$ due proiezioni ortogonali. Dimostrare:*

$$P + Q \text{ proiezione ortogonale} \iff PQ = QP = 0.$$

In questo caso, $P + Q$ è la proiezione ortogonale su $\operatorname{im} P \oplus \operatorname{im} Q$.

2 Operatori compatti in spazi di Hilbert

Di cosa si tratta? Operatori di rango finito hanno una struttura particolarmente semplice. La proprietà di avere immagine di dimensione finita non è stabile sotto passaggio al limite. In uno spazio di Hilbert, la chiusura degli operatori di rango finito definisce lo spazio degli operatori compatti. Dimostriamo alcune proprietà fondamentali degli operatori compatti, in particolare che un operatore lineare è compatto se e solo se l'immagine di ogni sottoinsieme limitato del dominio è un insieme relativamente compatto del codominio.

2.1 Operatori di rango finito

2.1 Definizione. *$T \in \mathscr{L}(H)$ si dice di rango finito, se $\dim \operatorname{im} T < +\infty$. Scriviamo*

$$\mathscr{F}(H) = \{T \in \mathscr{L}(H) \mid \dim \operatorname{im} T < +\infty\}.$$

2.2 Lemma. *Sia $T \in \mathscr{F}(H)$ e $n := \dim \operatorname{im} T$. Allora esistono $x_1, \ldots, x_n \in H$ e $y_1, \ldots, y_n \in H$ tale che*

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} (x, y_i) x_i \qquad \forall\, x \in H.$$

In questo caso, $T^* \in \mathscr{F}(H)$ e $T^* y = \sum_{i=1}^{n} (y, x_i) y_i$ per ogni $y \in H$.

Dimostrazione. Sia $x_1, \ldots, x_n$ una base ortonormale di $M := \operatorname{im} T$ e $x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots$ una base ortonormale di $M^\perp$. Quindi $\{x_i \mid i \geqslant 1\}$ è una base ortonormale di H.

$$\Rightarrow Tx = \sum_{i=1}^{+\infty} (Tx, x_i) x_i \overset{Tx \in M}{=} \sum_{i=1}^{n} (Tx, x_i) x_i = \sum_{i=1}^{n} (x, y_i) x_i \quad \forall\, x \in H \text{ con } y_i := T^* x_i.$$

$$(x, T^* y) = (Tx, y) = \sum_{k=1}^{n} (x, y_i)(x_i, y) = \Big(x, \sum_{i=1}^{n} \overline{(x_i, y)} y_i\Big) = \Big(x, \sum_{i=1}^{n} (y, x_i) y_i\Big).$$ ∎

2.2 Operatori compatti

2.3 Definizione. *$T \in \mathscr{L}(H)$ si dice compatto, se esiste una successione $(T_j) \subset \mathscr{F}(H)$ tale che $\|T_j - T\| \xrightarrow{j \to +\infty} 0$. Scriviamo*

$$\mathscr{K}(H) = \{T \in \mathscr{L}(H) \mid T \text{ compatto}\}.$$

Si noti che $\mathscr{K}(H)$ è un sottoinsieme chiuso di $\mathscr{L}(H)$ dato che è la chiusura di $\mathscr{F}(H)$ in $\mathscr{L}(H)$.

2.4 Esempio. *Siano* $T, T_j \in \mathscr{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ *dati da*

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = \Big(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots, \frac{1}{n}x_n, \dots\Big),$$
$$T_j(x_1, x_2, x_3, \dots) = \Big(x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{j}x_j, 0, 0, \dots\Big).$$

$\operatorname{im} T_j = \{x = (x_k) \in \ell^2 \mid x_k = 0$ *per ogni* $n \geqslant j+1\}$ *ha dimensione* j *e*

$$\|(T - T_j)x\|^2 = \sum_{k=j+1}^{+\infty} \Big|\frac{1}{k}x_k\Big|^2 \leqslant \frac{1}{(j+1)^2} \sum_{k=j+1}^{+\infty} |x_k|^2 \leqslant \frac{1}{(j+1)^2}\|x\|^2.$$

$\Rightarrow \|T - T_j\| \leqslant 1/(j+1) \xrightarrow{j \to +\infty} 0 \Rightarrow T \in \mathscr{K}(\ell^2)$.

2.5 Esempio. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *e* T *un operatore integrale con nucleo* $k \in L^2(A \times A)$,

$$(Tf)(t) = \int_A k(t,s) f(s)\, ds.$$

Cauchy-Schwarz $\Rightarrow$

$$|(Tf)(t)| \leqslant \int_A |k(t,s)||f(s)|\, ds \leqslant \Big(\int_A |k(t,s)|^2\, ds\Big)^{1/2} \|f\|_{L^2(A)},$$
$$\|Tf\|^2_{L^2(A)} \leqslant \int_A \int_A |k(t,s)|^2\, ds \|f\|^2_{L^2(A)}\, dt = \|k\|^2_{L^2(A\times A)} \|f\|^2_{L^2(A)}.$$

$\Rightarrow T \in \mathscr{L}(L^2(A))$ *con* $\|T\| \leqslant \|k\|_{L^2(A\times A)}$.

Sia $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ *una base ortonormale di* $L^2(A)$ *e*

$$f_{ij}(t,s) := e_i(t)\overline{e_j(s)}, \qquad i, j \geqslant 1.$$

$\Rightarrow \{f_{ij} \mid i, j \geqslant 1\}$ *base ortonormale di* $L^2(A \times A)$ *(cfr. Esercizio* 2.4*).*

$$\Rightarrow k(t,s) = \sum_{i,j=1}^{+\infty} a_{ij} e_i(t)\overline{e_j(s)}, \quad a_{ij} = (k, f_{ij})_{L^2(A\times A)} \qquad (\text{convergenza in } L^2(A \times A))$$

Definiamo T_ℓ *tramite il nucleo* $k_\ell(t,s) = \sum_{i,j=1}^{\ell} a_{ij} e_i(t)\overline{e_j(s)}$.

$$T_\ell f = \sum_{i,j=1}^{\ell} a_{ij} e_i (f, e_j) \Rightarrow \operatorname{im} T_\ell \subseteq \langle e_1, \dots, e_\ell\rangle \Rightarrow T_\ell \in \mathscr{F}(H).$$

$$\|T - T_\ell\|^2 \leqslant \|k - k_\ell\|^2_{L^2(A\times A)} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>\ell \text{ o } j>\ell}}^{+\infty} |a_{ij}|^2 \xrightarrow{\ell \to +\infty} 0.$$

$\Rightarrow T \in \mathscr{K}(L^2(A))$.

2.6 Teorema. *Sia $\mathscr{V} = \mathscr{F}(H)$ oppure $\mathscr{V} = \mathscr{K}(H)$. Allora:*

a) *$\mathscr{V}$ è un sottospazio di $\mathscr{L}(H)$;*

b) *$T \in \mathscr{V}$ allora $T^* \in \mathscr{V}$;*

c) *$T \in \mathscr{V}$ e $S \in \mathscr{L}(H)$, allora $ST, TS \in \mathscr{V}$.*

Dimostrazione. Consideriamo prima $\mathscr{V} = \mathscr{F}(H)$.
a) $S, T \in \mathscr{F}(H)$, $\alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \operatorname{im}(S+T) \subseteq \operatorname{im} S + \operatorname{im} T$ e $\operatorname{im}(\alpha T) \subseteq \operatorname{im} T$ hanno dimensione finita.
b) È il Lemma 2.2.
c) $\operatorname{im} TS = TS(H) = T(S(H)) \subseteq T(H) = \operatorname{im} T \Rightarrow \dim \operatorname{im} TS \leqslant \dim \operatorname{im} T < +\infty$.
$\operatorname{im} ST = ST(H) = S(T(H)) = S(\operatorname{im} T) \Rightarrow \dim \operatorname{im} ST \leqslant \dim \operatorname{im} T < +\infty$.
Le affermazioni per $\mathscr{V} = \mathscr{K}(H)$ seguono tramite approssimazione e continuità. Per esempio, siano $T_j \in \mathscr{F}(H)$ e $T_j \to T$. Allora

$$\|T_j^* - T^*\| = \|(T_j - T)^*\| = \|T_j - T\| \xrightarrow{j\to+\infty} 0,$$
$$\|ST_j - ST\| = \|S(T_j - T)\| \leqslant \|S\|\|T_j - T\| \xrightarrow{j\to+\infty} 0.$$

Siccome $T_j^*, ST_j \in \mathscr{F}(H)$, abbiamo provato che $T^*, ST \in \mathscr{K}(H)$. ■

2.3 Caratterizzazioni della compattezza

Ricordiamo che, in uno spazio metrico completo, per un sottoinsieme Ω le seguenti affermazioni sono equivalenti:

a) Ω è relativamente compatto (cioè $\overline{\Omega}$ è compatto);

b) Ω è totalmente limitato, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero finito di elementi $x_1, \ldots, x_N \in \Omega$ tale che $\Omega \subseteq B_\varepsilon(x_1) \cup \ldots \cup B_\varepsilon(x_N)$ (una cosiddetta ε-rete), dove $B_\delta(p) = \{x \in X \mid d(x,p) < \delta\}$;

c) Ogni successione in Ω contiene una sottosuccessione convergente.

Un insieme compatto è sempre limitato e chiuso. In uno spazio vettoriale di dimensione finita (quindi isomorfo a $\mathbb{C}^n$ per qualche n) vale anche l'opposto: cioè, un insieme limitato e chiuso è compatto.

2.7 Teorema. *Siano $T \in \mathscr{L}(H)$ e $B = \{x \in H \mid \|x\| \leqslant 1\}$. Allora si ha:*

$$T \in \mathscr{K}(H) \iff T(B) \text{ relativamente compatto.}$$

Dimostrazione. "$\Rightarrow$": Sia dato un $\varepsilon > 0$.

$T \in \mathscr{K}(H) \Rightarrow \exists\, S \in \mathscr{F}(H): \quad \|T - S\| < \varepsilon/2.$

$$\left.\begin{array}{l} Y := \operatorname{im} S \text{ sottospazio chiuso di dimensione finita} \\ \overline{S(B)} \subset Y \text{ limitato e chiuso} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{S(B)} \text{ è compatta in } Y.$$

$\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, y_1, \ldots, y_n \in S(B): \quad S(B) \subset B^Y_{\varepsilon/2}(y_1) \cup \ldots \cup B^Y_{\varepsilon/2}(y_n),$
dove $B^Y_\delta(y_i) = \{y \in Y \mid \|y - y_i\| < \delta\}$.

Sia $x \in B$ arbitrario.

$\Rightarrow \exists\, i \in \{1, \ldots, n\}: \quad Sx \in B^Y_{\varepsilon/2}(y_i).$

$\Rightarrow \|Tx - y_i\| \leqslant \|Tx - Sx\| + \|Sx - y\| < \frac{\varepsilon}{2}\|x\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$

$\Rightarrow Tx \in B_\varepsilon(y_i)$ (qui $B_\varepsilon(y_i) = \{z \in H \mid \|z - y_i\| < \varepsilon\}$).

$\Rightarrow T(B) \subset B_\varepsilon(y_1) \cup \ldots \cup B_\varepsilon(y_n)$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon$-rete per $T(B)$.

$\Rightarrow T(B)$ relativamente compatto.

"$\Leftarrow$": Sia dato un $\varepsilon > 0$.

$T(B)$ relativamente compatto $\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, y_1, \ldots, y_n \in H: \quad T(B) \subset B_\varepsilon(y_1) \cup \ldots \cup B_\varepsilon(y_n).$

$M := \langle y_1, \ldots, y_n \rangle \Rightarrow T_\varepsilon := P_M T \in \mathscr{F}(H).$

Sia $x \in B$ arbitrario.

$\exists\, k \in \{1, \ldots, n\}: \quad \|Tx - y_k\| < \varepsilon$. Quindi

$$\begin{aligned} \|(T_\varepsilon - T)x\| &\leqslant \|T_\varepsilon x - y_k\| + \|y_k - Tx\| = \|P_M Tx - P_M y_k\| + \|y_k - Tx\| \\ &\leqslant \|P_M\|\|Tx - y_k\| + \|y_k - Tx\| \leqslant 2\varepsilon. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|T_\varepsilon - T\| = \sup_{x \in B} \|(T_\varepsilon - T)x\| \leqslant 2\varepsilon.$$

$\varepsilon = 1/j \Rightarrow \|T - T_{1/j}\| \leqslant 2/j \xrightarrow{j \to +\infty} 0.$

$T_{1/j} \in \mathscr{F}(H) \quad \forall\, j \Rightarrow T \in \mathscr{K}(H).$ ■

Negli spazi di Banach, si *definiscono* gli operatori compatti tramite il Teorema 2.7.

Definizione. Siano X, Y spazi di Banach e $B = \{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1\}$. L'operatore $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ si dice compatto se $T(B)$ è relativamente compatto in Y.

Un operatore che è limite di operatori di rango finito risulta essere compatto (con la stessa dimostrazione), ma il risultato opposto vale solo in spazi di Hilbert! Si può dimostrare che $\mathscr{K}(X, Y)$ è uno sottospazio chiuso di $\mathscr{L}(X, Y)$.

2.8 Teorema. *Per $T \in \mathscr{L}(H)$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a) $T \in \mathscr{K}(H)$.

b) Se (x_k) è una qualsiasi successione limitata, allora (Tx_k) contiene una sottosucces-

sione convergente.

c) *Se $(x_k) \subset H$ è una qualsiasi successione debolmente convergente, allora (Tx_k) converge in H.*

DIMOSTRAZIONE. **a)** $\Rightarrow$ **b)** : Sia $\|x_k\| \leqslant C \quad \forall\, k$.

$y_k := x_k/C \Rightarrow (y_k) \subseteq B = \{y \in H \mid \|y\| \leqslant 1\}$.

Teorema 2.7 $\Rightarrow (Ty_k)$ contiene una sottosuccessione convergente.

Sia $Ty_{k_j} \xrightarrow{j\to+\infty} y$. Ne segue

$Tx_{k_j} \xrightarrow{j\to+\infty} Cy \Rightarrow (Tx_k)$ contiene una sottosuccessione convergente.

b) $\Rightarrow$ **a)** : Ogni successione in $T(B)$ è della forma (Tx_k) con $\|x_k\| \leqslant 1$.

Ipotesi $\Rightarrow$ Ogni successione in $T(B)$ contiene una sottosuccessione convergente

$\Rightarrow T(B)$ è relativamente compatto.

Teorema 2.7 $\Rightarrow T$ compatto.

a) $\Rightarrow$ **c)** : Sia $x_n \rightharpoonup x$. In particolare, (x_n) è limitata.

$x' \in H' \Rightarrow x' \circ T \in H' \Rightarrow x'(Tx_n) = (x' \circ T)(x_n) \to (x' \circ T)(x) = x'(Tx)$

$\Rightarrow Tx_n \rightharpoonup Tx$.

Dimostriamo $Tx_n \to Tx$. Per assurdo, supponiamo che sia vero il contrario. Si ha quindi

$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, (x_{n_\ell}) : \quad \|Tx_{n_\ell} - Tx\| \geqslant \varepsilon \qquad (*)$.

$$\left.\begin{array}{c}(x_{n_\ell}) \text{ limitata} \\ T \text{ compatto}\end{array}\right\} \overset{2.8}{\Rightarrow} \exists\, (x_{n_{\ell_j}}), y : \quad Tx_{n_{\ell_j}} \to y$$

$Tx_n \rightharpoonup Tx \Rightarrow Tx_{n_{\ell_j}} \rightharpoonup Tx \Rightarrow y = Tx \Rightarrow Tx_{n_{\ell_j}} \to Tx$ ↯ (contraddice $(*)$).

c) $\Rightarrow$ **a)** : Sia (x_k) limitata.

Teorema di Eberlein-Smulian (H è riflessivo!) $\Rightarrow \exists\, (x_{k_\ell})$ debolmente convergente.

Ipotesi $\Rightarrow (Tx_{k_\ell})$ convergente $\Rightarrow (Tx_k)$ contiene una sottosuccessione convergente.

Allora c) implica b) e quindi a). ∎

2.9 Corollario. *Sia $I : H \to H$ l'operatore identità (cioè $Ix = x$ per ogni $x \in H$). Allora:*

$$I \in \mathscr{K}(H) \iff \dim H < +\infty.$$

DIMOSTRAZIONE. "$\Leftarrow$": $\dim \operatorname{im} I = \dim H < +\infty \Rightarrow I \in \mathscr{F}(H) \subseteq \mathscr{K}(H)$.

"$\Rightarrow$": Supponiamo $\dim H = +\infty$ con base ortonormale $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$.

$(e_k) \subseteq B = \{x \mid \|x\| = 1\}$.

$k \neq \ell \Rightarrow \|e_k - e_\ell\|^2 = \|e_k\|^2 + \|e_\ell\|^2 = 2$

$\Rightarrow (Ie_k) = (e_k)$ non contiene nessuna sottosuccessione convergente.

Teorema 2.8 $\Rightarrow I$ non è compatta. $\lightning$ ∎

Di consequenza, in uno spazio H di dimensione infinita, un operatore compatto non è mai invertibile (perché altrimenti $I = TT^{-1}$ sarebbe compatto).

2.4 Esercizi

Esercizio 2.1. *Sia $T \in \mathscr{L}(H)$. Dimostrare: $T \in \mathscr{K}(H) \iff T^*T \in \mathscr{K}(H)$.*

Esercizio 2.2. *Sia $T \in \mathscr{L}(H)$ e V uno sottospazio chiuso di H con $T(V) \subseteq V$. Mostrare:*

a) *T autoaggiunto $\Rightarrow T(V^\perp) \subset V^\perp$.*

b) *T compatto $\Rightarrow T|_V : V \to V$ compatto.*

Esercizio 2.3. *Sia $(a_n) \subset \mathbb{C}$ una successione convergente ad a e sia $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ definito da*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, a_4x_4, \ldots).$$

Dimostrare che $aI - T$ è un operatore compatto.

Esercizio 2.4. *Sia $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ una base ortonormale di $L^2(A)$. Dimostrare che le funzioni*

$$f_{jk}(s,t) := e_j(s)e_k(t), \qquad j, k \geqslant 1,$$

definiscono una base ortonormale $\{f_{jk} \mid j, k \geqslant 1\}$ di $L^2(A \times A)$.

Suggerimento. *Si utilizzi il seguente teorema: Un sistema ortonormale $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ in uno spazio di Hilbert è una base ortonormale se, e solo se,*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |(x, x_k)|^2 \qquad \forall\, x \in H.$$

Osservazione. *Siccome*

$$\begin{gathered}\{e_1, e_2, e_3, \ldots\} \text{ è una base ortonormale di } L^2(A)\\ \Leftrightarrow\\ \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \ldots\} \text{ è una base ortonormale di } L^2(A),\end{gathered}$$

in modo simile si dimostra che, posto $\widetilde{f}_{jk}(s,t) = e_j(s)\overline{e_k(t)}$, $j, k \geqslant 1$, $\{\widetilde{f}_{jk} \mid j, k \geqslant 1\}$ è una base ortonormale di $L^2(A \times A)$.

3 Operatori di Fredholm

Di cosa si tratta? Introduciamo la classe degli operatori di Fredholm (anche detti operatori ad indice). Sono operatori che hanno nucleo di dimensione finita e immagine di co-dimensione finita. In altre parole, se $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ è un operatore di Fredholm, lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea $Tx = 0$ ha dimensione finita, mentre l'equazione inomogenea $Tx = y$ è solubile per quasi tutti y, salvo un difetto di dimensione finita.

Nel seguito, $I = I_X$ indica l'operatore identità $X \to X$, cioè $I(x) = x \quad \forall\, x \in X$.

3.1 Invertibilità di operatori

3.1 Teorema (Serie di Neumann). *Sia $T \in \mathscr{L}(X)$ con $\|T\| < 1$. Allora $I - T \in \mathscr{L}(X)$ è invertibile con*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} T^k = I + T + T^2 + \dots,$$

dove la serie converge (assolutamente) in $\mathscr{L}(X)$. In particolare, $\|(I-T)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|T\|}$.

Dimostrazione. $\|T^k\| \leqslant \|T\|^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \|T^k\| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \|T\|^k = \frac{1}{1-\|T\|} < +\infty$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} T^k$ assolutamente convergente in $\mathscr{L}(X)$.

X Banach $\Rightarrow \mathscr{L}(X)$ spazio di Banach $\Rightarrow \exists S \in \mathscr{L}(X) : \quad S_n := \sum_{k=0}^{n} T^k \xrightarrow{n\to+\infty} S$ in $\mathscr{L}(X)$.

$\|T^k\| \leqslant \|T\|^k \xrightarrow{k\to+\infty} 0 \Rightarrow$

$$(I-T)S \xleftarrow{n\to+\infty} (I-T)S_n = (I-T)(I+T+T^2+\dots+T^n) = I - T^{n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} I$$

$\Rightarrow (I-T)S = I$

Analogamente: $S(I-T) = I$

$\Rightarrow (I-T)$ invertibile, $(I-T)^{-1} = S$. ■

3.2 Corollario. *Siano $S, T \in \mathscr{L}(X,Y)$. Allora:*

$$T \textit{ invertibile e } \|S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|} \Rightarrow S + T \textit{ invertible.}$$

In particolare: $\mathscr{L}^{-1}(X,Y) := \{T \in \mathscr{L}(X,Y) \mid T \text{ invertibile}\}$ è aperto in $\mathscr{L}(X,Y)$.

Dimostrazione. $S + T = T(I + T^{-1}S)$.
$\|T^{-1}S\| \leqslant \|T^{-1}\|\|S\| < 1 \overset{3.1}{\Rightarrow} I + T^{-1}S$ invertibile.
$\Rightarrow (S+T)^{-1} = (I+T^{-1}S)^{-1}T^{-1}$. ■

3.3 Corollario (Continuità dell'inversione)**.** *Sia* $T_k \xrightarrow{k\to+\infty} T$ *in* $\mathscr{L}(X,Y)$ *e* T *e tutti* T_k *siano invertibili. Allora* $T_k^{-1} \xrightarrow{k\to+\infty} T^{-1}$ *in* $\mathscr{L}(Y,X)$.

Dimostrazione. $\|T_k^{-1}T\| = \|(I - T^{-1}(T-T_k))^{-1}\| \overset{\text{Teorema 3.1}}{\leqslant} \frac{1}{1-\|T^{-1}(T-T_k)\|} \xrightarrow{k\to+\infty} 1$
$\Rightarrow \|T_k^{-1} - T^{-1}\| = \|T_k^{-1}(T_k - T)T^{-1}\| \leqslant \|T_k^{-1}T\|\|T_k - T\|\|T^{-1}\|^2 \xrightarrow{k\to+\infty} 0.$ ■

3.2 Operatori di Fredholm

3.4 Definizione. $T \in \mathscr{L}(X,Y)$, X, Y *spazi di Banach, si dice (operatore di) Fredholm oppure operatore ad indice, se* $\dim\ker T < +\infty$ *e* $\operatorname{codim}\operatorname{im} T = \dim(Y/\operatorname{im} T) < +\infty$. *Si definisce*

$$\operatorname{ind} T := \dim\ker T - \operatorname{codim}\operatorname{im} T. \qquad (\textit{indice di } T).$$

Scriviamo

$$\operatorname{Fred}(X,Y) := \{T \in \mathscr{L}(X,Y) \mid T \text{ Fredholm}\}, \qquad \operatorname{Fred}(X) := \operatorname{Fred}(X,X),$$

3.5 Esempio. *Sia* $T : \mathscr{C}^1([a,b]) \to \mathscr{C}([a,b])$ *con* $Tu = u'$ *(derivata prima).*

- $Tu = 0 \iff u' = 0 \iff u \equiv \text{const.} \Rightarrow \ker T = \{u \equiv c \mid c \in \mathbb{C}\}$ *ha dimensione* 1.
- *Dato* $v \in \mathscr{C}([a,b])$, *allora* $v = Tu$ *con* $u(x) = \int_a^x v(t)\,dt + \text{const} \Rightarrow T$ *suriettivo.*

Ne segue T *Fredholm, con* $\operatorname{ind} T = 1 - 0 = 1$.

3.6 Esempio. *Sia* $T : \mathscr{C}^1_{2\pi-per}(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}_{2\pi-per}(\mathbb{R})$ *(funzioni 2π-periodiche) con* $Tu = u'$.
Come sopra, $\dim\ker T = 1$.

$v = u' \in \operatorname{im} T \Rightarrow \int_0^{2\pi} v(\theta)\,d\theta = u(2\pi) - u(0) = 0.$

$v \in \mathscr{C}_{2\pi-per}(\mathbb{R})$ *con* $\int_0^{2\pi} v(\theta)\,d\theta = 0 \Rightarrow u(x) := \int_0^x v(\theta)\,d\theta + \text{const}$ *è 2π-periodica*

$\Rightarrow \operatorname{im} T = \left\{v \in \mathscr{C}_{2\pi-per}(\mathbb{R}) \mid \int_0^{2\pi} v(\theta)\,d\theta = 0\right\}$, $\mathscr{C}_{2\pi-per}(\mathbb{R}) = \operatorname{im} T \oplus \{u \equiv c \mid c \in \mathbb{C}\}$.

Ne segue T *Fredholm, con* $\operatorname{ind} T = 1 - 1 = 0$.

Nota (somma diretta): Sia $X \oplus Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$.

(1) X, Y Banach $\Rightarrow X \oplus Y$ Banach con norma $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$;

(2) X, Y Hilbert $\Rightarrow X \oplus Y$ Hilbert con prodotto interno

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = (x_1, x_2)_X + (y_1, y_2)_Y.$$

3.7 Teorema (Lemma di Kato). *Sia* $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ *con* $\operatorname{codim} \operatorname{im} T < +\infty$. *Allora* $\operatorname{im} T$ *è chiuso. In particolare,* $T \in \operatorname{Fred}(X, Y) \Rightarrow \operatorname{im} T$ *chiuso.*

Dimostrazione. **(1)** Supponiamo che T sia iniettivo.
Sia $Y = \operatorname{im} T + Z$, $\dim Z = \operatorname{codim} \operatorname{im} T < +\infty \Rightarrow (Z, \|\cdot\|_Y)$ spazio di Banach.
Sia $S : X \oplus Z \to Y$, $S(x, z) = Tx + z$.
Ovviamente S è suriettivo.
S è iniettivo: $S(x, z) = 0 \Rightarrow Tx = -z \in \operatorname{im} T \cap Z = \{0\} \Rightarrow Tx = z = 0 \Rightarrow x = z = 0$.
S è continuo: $(x_k, z_k) \to (0, 0) \Rightarrow x_k \to 0,\ z_k \to 0 \Rightarrow S(x_k, z_k) = Tx_k + z_k \to 0$.
Dunque, $S \in \mathscr{L}(X \oplus Z, Y)$ è biiettivo.
Teorema 0.1 $\Rightarrow S^{-1} \in \mathscr{L}(Y, X \oplus Z)$
$\Rightarrow (S^{-1})^{-1}(A) = S(A)$ (pre-immagine di A sotto S^{-1}) chiuso per ogni $A \subset X \oplus Z$ chiuso.
$X \times \{0\}$ chiuso in $X \oplus Z \Rightarrow S(X \times \{0\}) = T(X) = \operatorname{im} T$ chiuso in Y.
(2) Sia $X = H$ spazio di Hilbert. Si ha allora
$H = \ker T \oplus (\ker T)^{\perp}$.
Posto $\widetilde{H} := (\ker T)^{\perp}$, $\widetilde{T} := T|_{\widetilde{H}}$, segue
$\widetilde{T} \in \mathscr{L}(\widetilde{H}, Y)$, $\widetilde{T}$ iniettivo, $\operatorname{im} \widetilde{T} = \operatorname{im} T$.
i) $\Rightarrow \operatorname{im} \widetilde{T}$ chiuso.
(Non dimostriamo il caso in cui X è spazio di Banach.)[1] ∎

3.8 Corollario. $T \in \operatorname{Fred}(H) \Rightarrow H = \operatorname{im} T \oplus (\operatorname{im} T)^{\perp} = \operatorname{im} T \oplus \ker T^*$ *e*

$$\operatorname{ind} T = \dim \ker T - \dim \ker T^*.$$

In particolare: $T \in \operatorname{Fred}(H)$ *autoaggiunto* $\Rightarrow \operatorname{ind} T = 0$.

[1] La dimostrazione è analoga, utilizzando lo *spazio quoziente* $\widetilde{X} := X/\ker T$ con norma $\|[x]\| = \inf_{v \in \ker T} \|x + v\|_X$ dove $[x] = x + \ker T$. Allora $\widetilde{X}$ è uno spazio di Banach e $\widetilde{T}[x] := Tx$ definisce un operatore iniettivo $\widetilde{T} \in \mathscr{L}(\widetilde{X}, Y)$ con $\operatorname{im} \widetilde{T} = \operatorname{im} T$. Se X è spazio di Hilbert, $X/\ker T \cong (\ker T)^{\perp}$.

3.3 Proprietà fondamentali

3.9 Teorema. *Per $T \in \mathscr{L}(H)$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) $T \in \operatorname{Fred}(H)$;

(2) $\exists\, S \in \mathscr{L}(H) \quad \exists\, R_0, R_1 \in \mathscr{F}(H): \quad ST = I - R_0$, *e* $TS = I - R_1$;

(3) $\exists\, S' \in \mathscr{L}(H) \quad \exists\, R_0', R_1' \in \mathscr{K}(H): \quad S'T = I - R_0'$, *e* $TS' = I - R_1'$.

Dimostrazione. $(\mathbf{1}) \Rightarrow (\mathbf{2})$: $X := \ker T$ e $Y := \operatorname{im} T$ chiusi $\Rightarrow H = X \oplus X^\perp = Y \oplus Y^\perp$.

$T_0 := T|_{X^\perp} \in \mathscr{L}(X^\perp, Y)$ biiettivo $\overset{\text{Teorema 0.1}}{\Rightarrow} T_0^{-1} \in \mathscr{L}(Y, X^\perp)$.

$S := T_0^{-1} P_Y \in \mathscr{L}(H) \Rightarrow$

$$TS = TT_0^{-1}P_Y = T_0T_0^{-1}P_Y = P_Y = I - P_{Y^\perp},$$
$$ST = T_0^{-1}P_YT = T_0^{-1}T = T_0^{-1}T(P_X + (1 - P_X)) = T_0^{-1}TP_{X^\perp} = T_0^{-1}T_0P_{X^\perp} = I - P_X.$$

$(\mathbf{2}) \Rightarrow (\mathbf{1})$: $x \in \ker T \Rightarrow 0 = STx = (I - R_0)x = x - R_0x \Rightarrow x = R_0x \in \operatorname{im} R_0$

$\Rightarrow \ker T \subseteq \operatorname{im} R_0$ ha dimensione finita.

$$x = R_1x + (I - R_1)x = R_1x + TSx \quad \forall\, x \Rightarrow H = \operatorname{im} R_1 + \underbrace{\operatorname{im} TS}_{\subseteq \operatorname{im} T} = \operatorname{im} R_1 + \operatorname{im} T$$

$\Rightarrow \operatorname{codim} \operatorname{im} T \leqslant \dim \operatorname{im} R_1 < +\infty$.

$(\mathbf{2}) \Rightarrow (\mathbf{3})$: Immediato, poiché $\mathscr{F}(H) \subseteq \mathscr{K}(H)$.

$(\mathbf{3}) \Rightarrow (\mathbf{2})$: Sia $F_0' \in \mathscr{F}(H)$ con $\|R_0' - F_0'\| < 1$.

Teorema 3.1 $\Rightarrow A_0 := I - (R_0' - F_0')$ invertibile

$\Rightarrow S'T = I - R_0' = A_0 - F_0' \Rightarrow (A_0^{-1}S')T = I - (A_0^{-1}F_0')$

$\Rightarrow ST = I - R_0$ con $S := A_0^{-1}S'$ e $R_0 := A_0^{-1}F_0' \in \mathscr{F}(H)$.

Analogamente: $\exists\, \tilde{S} \in \mathscr{L}(H) \quad \exists\, \tilde{R} \in \mathscr{F}(H): \quad T\tilde{S} = I - \tilde{R}$. Troviamo:

$S - \tilde{S} = S - (ST + R_0)\tilde{S} = S - S(I - \tilde{R}) + R_0\tilde{S} = S\tilde{R} + R_0\tilde{S} =: F \in \mathscr{F}(H)$

$\Rightarrow TS = T(\tilde{S} - F) = I - \tilde{R} - TF = I - R_1$ con $R_1 := \tilde{R} + TF \in \mathscr{F}(H)$. ∎

Esplicitamente: un operatore $T \in \mathscr{L}(H)$ è Fredholm se e solo se è invertibile *modulo* operatori compatti (oppure di rango finito), ovvero se e solo se ammette una paramtrix *modulo* operatori compatti (oppure di rango finito).

3.10 Corollario. $T \in \operatorname{Fred}(H) \Rightarrow T^* \in \operatorname{Fred}(H)$ *e* $\operatorname{ind} T^* = -\operatorname{ind} T$.

Dimostrazione. Teorema 3.9 $\Rightarrow T$ invertibile modulo $\mathscr{K}(H)$.

Teorema 1.5, b), Teorema 2.6, b) $\Rightarrow T^*$ invertibile modulo $\mathscr{K}(H)$.

Teorema 3.9 $\Rightarrow T^*$ Fredholm.

3.8 $\Rightarrow \operatorname{ind} T^* = \dim\ker T^* - \dim\ker T^{**} = -(\dim\ker T - \dim\ker T^*) = -\operatorname{ind} T.$ ∎

3.11 Teorema. *Per $T \in \mathscr{L}(H)$ le seguente affermazioni sono equivalenti:*

(1) $T \in \operatorname{Fred}(H)$;

(2) $\exists\, m,n \in \mathbb{N}_0 \quad \exists\, A \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n, H)$ *iniettivo* $\quad \exists\, B \in \mathscr{L}(H, \mathbb{C}^m)$:

$$\begin{pmatrix} T & A \\ B & 0 \end{pmatrix} : \begin{matrix} H \\ \oplus \\ \mathbb{C}^n \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H \\ \oplus \\ \mathbb{C}^m \end{matrix} : \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} T & A \\ B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Tx + Az \\ Bx \end{pmatrix},$$

è invertibile.

In questo caso $\operatorname{ind} T = m - n$.

Dimostrazione. La dimostrazione si basa su due risultati:

Lemma 1 (Esercizio 3.4). Siano $T_j : H_0 \to H_j$, $j = 1, 2$, lineari.

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} : H_0 \to \begin{matrix} H_1 \\ \oplus \\ H_2 \end{matrix} \text{ biiettivo } \iff T_2 : H_0 \to H_2 \text{ suriettivo e } T_1 : \ker T_2 \to H_1 \text{ biiettivo.}$$

Lemma 2. Siano $T \in \mathscr{L}(H)$ e U, V sottospazi chiusi di H con $\dim U < +\infty$ e $U \cap V = \{0\}$. Se $T \in \operatorname{Fred}(V, H)$ allora $T \in \operatorname{Fred}(V \oplus U, H)$ e

$$\operatorname{ind}(T : V \oplus U \to H) = \operatorname{ind}(T : V \to H) + \dim U.$$

Dimostrazione. Per induzione su $n := \dim U$.

$\mathbf{n = 0}$: vero.

Supponiamo che l'enunciato sia vero per ogni U con $\dim U = n \in \mathbb{N}_0$.

$\mathbf{n \Rightarrow n+1}$: Sia $u_1, \dots, u_{n+1}$ base di U, $U' := \langle u_1, \dots, u_n \rangle$.

$V' := V \oplus U' \Rightarrow \operatorname{ind}(T : V' \to H) = \operatorname{ind}(T : V \to H) + n.$

Primo caso: Sia $Tu_{n+1} \in T(V')$. Otteniamo

$\exists\, v' \in V' : \quad Tv' = Tu_{n+1}$

$\Rightarrow T(V' \oplus \langle u_{n+1} \rangle) = T(V'),$

$\ker(T : V' \oplus \langle u_{n+1} \rangle \to H) = \ker(T : V' \to H) \oplus \langle u_{n+1} - v' \rangle$ [2]

$$\begin{aligned} \Rightarrow \operatorname{ind}(T : V \oplus U \to H) &= \dim\ker(T : V' \to H) + 1 - \operatorname{codim} T(V') \\ &= \operatorname{ind}(T : V' \to H) + 1 = \operatorname{ind}(T : V \to H) + n + 1. \end{aligned}$$

[2] Per "$\subseteq$" si osserva: $v = v_0' + \alpha u_{n+1} \in \ker T$ con $v_0' \in V' \Rightarrow v = (v_0' + \alpha v') + \alpha(u_{n+1} - v')$

Secondo caso: Sia $Tu_{n+1} \notin T(V')$. Ne segue

$$T(V' \oplus \langle u_{n+1} \rangle) = T(V') \oplus \langle Tu_{n+1} \rangle,$$
$$\ker(T : V' \oplus \langle u_{n+1} \rangle \to H) = \ker(T : V' \to H)$$
$$\Rightarrow \operatorname{ind}(T : V \oplus U \to H) = \dim\ker(T : V' \to H) - \big[\operatorname{codim} T(V') - 1\big]$$
$$= \operatorname{ind}(T : V \to H) + n + 1. \qquad \blacksquare$$

$(\mathbf{1}) \Rightarrow (\mathbf{2})$: $m := \dim\ker T$, $n := \operatorname{codim}\operatorname{im} T = \dim(\operatorname{im} T)^\perp$.

$\Rightarrow \exists\, A \in \mathscr{L}^{-1}(\mathbb{C}^n, (\operatorname{im} T)^\perp)$, $B' \in \mathscr{L}^{-1}(\ker T, \mathbb{C}^m)$.

Con $B := B' P_{\ker T}$ vale (2) (applicare Lemma 1 con $H_0 = H \oplus \mathbb{C}^n$, $H_1 = H$, $H_2 = \mathbb{C}^m$ e $T_1 = (T \quad A)$, $T_2 = (B \quad 0)$).

$(\mathbf{2}) \Rightarrow (\mathbf{1})$: Lemma 1 $\Rightarrow B : H \to \mathbb{C}^m$ suriettivo, $\big(T \quad A\big) : \begin{matrix}\ker B \\ \oplus \\ \mathbb{C}^n\end{matrix} \longrightarrow H$ invertibile

$\Rightarrow H = T(\ker B) \oplus A(\mathbb{C}^n)$, $T : \ker B \to H$ iniettivo.

$\Rightarrow T : \ker B \to H$ Fredholm con indice $-\dim A(\mathbb{C}^n) = -n$.

$U := (\ker B)^\perp \Rightarrow B : U \to \mathbb{C}^m$ biettivo $\Rightarrow \dim U = n$.

Lemma 2 $\Rightarrow \operatorname{ind} T = \operatorname{ind}(T : \ker B \oplus U \to H) = \operatorname{ind}(T : \ker B \to H) + \dim U = m - n$. $\blacksquare$

3.12 Teorema. *$\operatorname{Fred}(H)$ è un sottoinsieme aperto di $\mathscr{L}(H)$ e $\operatorname{ind} : \operatorname{Fred}(H) \to \mathbb{Z}$ è localmente costante (in particolare, continuo).*

Dimostrazione. Sia $T \in \operatorname{Fred}(H)$ e $\mathcal{T} := \begin{pmatrix} T & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ come nel Teorema 3.11.b).

Siano $\varepsilon = 1/\|\mathcal{T}^{-1}\|$, $S \in \mathscr{L}(H)$ con $\|S - T\| < \varepsilon$ e $\mathcal{S} := \begin{pmatrix} S & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$. Allora

$\|\mathcal{S} - \mathcal{T}\| = \left\| \begin{pmatrix} S - T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \|S - T\| < \varepsilon.$

Corollario 3.2 $\Rightarrow \mathcal{S}$ è invertibile.

Lemma 3.11 $\Rightarrow S \in \operatorname{Fred}(H)$ con $\operatorname{ind} S = m - n = \operatorname{ind} T$. $\blacksquare$

3.13 Teorema. *Valgono le seguenti proprietà.*

a) Sia $T : [0,1] \to \mathscr{L}(H)$ continua e $T(t) \in \operatorname{Fred}(H)$ per ogni t. Allora

$$\operatorname{ind} T(0) = \operatorname{ind} T(1).$$

b) Siano $T \in \operatorname{Fred}(H)$ e $K \in \mathscr{K}(H)$. Allora $T + K \in \operatorname{Fred}(H)$ e

$$\operatorname{ind}(T + K) = \operatorname{ind} T.$$

Dimostrazione. a) $t \mapsto \operatorname{ind} T(t) : [0,1] \to \mathbb{Z}$ è continuo e quindi costante.

b) T invertibile modulo $\mathscr{K}(H) \Rightarrow T + tK$ invertibile modulo $\mathscr{K}(H) \Rightarrow T + tK \in \mathrm{Fred}(H)$.
Si conclude applicando il punto a) alla famiglia continua di operatori $T(t) := T + tK$. ∎

3.14 Corollario. *Sia $T \in \mathscr{K}(H)$ e $\lambda \neq 0$. Allora $\lambda I - T \in \mathrm{Fred}(H)$ con $\operatorname{ind}(\lambda I - T) = 0$. Quindi, l'equazione*

$$(\lambda I - T)x = y$$

ha un'unica soluzione per ogni $y \in H$, oppure l'equazione

$$(\lambda I - T)x = 0$$

ha una soluzione non-triviale ($x \neq 0$).

3.15 Teorema. *$S, T \in \mathrm{Fred}(H) \Rightarrow ST \in \mathrm{Fred}(H)$ e $\operatorname{ind} ST = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T$.*

Dimostrazione. i) La composizione di operatori Fredholm è Fredholm:
T_1, T_2 invertibili modulo $\mathscr{K}(H) \Rightarrow T_1T_2$ invertibile modulo $\mathscr{K}(H) \Rightarrow T_1T_2 \in \mathrm{Fred}(H)$.

ii) $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} : \begin{matrix} H \\ \oplus \\ H \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H \\ \oplus \\ H \end{matrix}$ Fredholm $\Rightarrow$

$$\mathcal{T}(t) := \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I\cos(\pi t/2) & -I\sin(\pi t/2) \\ I\sin(\pi t/2) & I\cos(\pi t/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} : [0,1] \to \mathscr{L}(H \oplus H)$$

è continua e Fredholm per ogni t, dato che l'operatore al centro della composizione è invertibile.
Teorema 3.13.a) $\Rightarrow \operatorname{ind} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} = \operatorname{ind} \mathcal{T}(0) = \operatorname{ind} \mathcal{T}(1) = \operatorname{ind} \begin{pmatrix} 0 & -ST \\ I & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio. $T_1, T_2 \in \mathrm{Fred}(H) \Rightarrow \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & T_1 \\ T_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Fred}(H \oplus H)$ con

$$\operatorname{ind} \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} = \operatorname{ind} \begin{pmatrix} 0 & T_1 \\ T_2 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{ind} T_1 + \operatorname{ind} T_2.$$

Troviamo quindi[3]

$$\operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T = \operatorname{ind} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} = \operatorname{ind} \begin{pmatrix} 0 & -ST \\ I & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{ind}(-ST) + \operatorname{ind} I = \operatorname{ind} ST.$$ ∎

[3] È immediato provare "T è Fredholm $\Leftrightarrow -T$ è Fredholm", e si ha $\operatorname{ind} T = \operatorname{ind}(-T)$.

3.4 Esercizi

Esercizio 3.1. *Sia $T \in \mathscr{L}(H)$ nilpotente, cioè esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $T^N = 0$. Dimostrare che $I - T$ è invertibile.*

Esercizio 3.2. *Nei seguenti casi determinare* $\dim \ker T$ *e* $\operatorname{codim} \operatorname{im} T$:

1) $T = \frac{d^2}{dx^2} : \mathscr{C}^2([a,b]) \to \mathscr{C}([a,b])$.

2) $T = \frac{d^2}{dx^2} : \mathscr{C}^2(\mathbb{S}^1) \to \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$.

3) $T \in \mathscr{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ *con* $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_2, x_3, \dots)$.

Esercizio 3.3. *Sia $T \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$. Determinare l'indice di T.*

Esercizio 3.4. *Siano $T_j : H \to H_j$, $j = 1, 2$, lineari. Dimostrare che*

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} : H \to \begin{matrix} H_1 \\ \oplus \\ H_2 \end{matrix} \ \textit{biiettivo} \iff T_2 : H \to H_2 \ \textit{suriettivo e}\ T_1 : \ker T_2 \to H_1 \ \textit{biiettivo.}$$

4 Teoria spettrale

Di cosa si tratta? Lo *spettro* di un operatore $T \in \mathscr{L}(X)$, X Banach, può essere considerato come una generalizzazione dell'*insieme degli autovalori* di una matrice quadrata al caso infinito dimensionale. Consiste di tutti i valori $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $\lambda I - T$ non è invertibile. Il teorema spettrale per gli operatori compatti e autoaggiunti in uno spazio di Hilbert generalizza il fatto che le matrici autoaggiunte sono diagonalizzabili. Determiniamo, in particolare, lo spettro degli operatori di rango finito in uno spazio di Hilbert.

4.1 Spettro e risolvente di operatori limitati

4.1 Definizione. *Sia $T \in \mathscr{L}(X)$, X Banach. L'insieme risolvente di T è*

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T \text{ è invertibile}\}.$$

L'operatore risolvente di T è

$$R(\lambda, T) := (\lambda I - T)^{-1}, \qquad \lambda \in \rho(T).$$

Il complementare dell'insieme risolvente si chiama lo spettro di T,

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \backslash \rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T \text{ non è invertibile}\}.$$

$\lambda \in \sigma(T)$ si dice autovalore se

$$\ker(\lambda I - T) = \{x \in X \mid Tx = \lambda x\} \neq \{0\} \qquad (\textit{autospazio di } \lambda).$$

Se $\lambda \in \sigma(T)$ non è un autovalore, allora

$$\ker(\lambda I - T) = \{0\}, \qquad \operatorname{im}(\lambda I - T) \subset X \text{ (inclusione stretta)},$$

cioè $\lambda I - T$ è iniettivo ma non suriettivo.

Definizione. Più in generale, si possono dare le seguenti definizioni:

(1) spettro puntuale: $\lambda \in \sigma_p(T) \Leftrightarrow \ker(\lambda I - T) \neq \{0\}$ (λ è un autovalore di T).

(2) Se $\ker(\lambda I - T) = \{0\}$ (cioè $\lambda I - T$ è iniettivo):

  (i) spettro continuo: $\lambda \in \sigma_c(T) \Leftrightarrow \lambda I - T$ non è suriettivo ma il suo immagine è denso in X.

  (ii) spettro residuale: $\lambda \in \sigma_r(T) \Leftrightarrow$ l'immagine di $\lambda I - T$ non è denso in X.

Per definizione, si ha quindi

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) = \mathbb{C}\backslash\rho(T).$$

4.2 Esempio. *Sia $X := \mathscr{C}([a,b])$ e $T \in \mathscr{L}(X)$ l'operatore di moltiplicazione per $h \in X$, cioè*

$$(Tf)(t) = h(t)f(t), \qquad f \in X,\ t \in [a,b].$$

T è limitato:

$$\|Tf\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |h(t)||f(t)| \leqslant \|h\|_\infty \|f\|_\infty \quad \forall\, f \in X \Rightarrow \|T\|_{\mathscr{L}(X)} \leqslant \|h\|_\infty.$$

Per $g \in X$,

$$(\lambda I - T)f = g \iff f(t) = \frac{g(t)}{\lambda - h(t)} \quad \forall\, t \in [a,b].$$

Se $\lambda \notin h([a,b])$, $\frac{1}{\lambda-h} \in C([a,b])$ e $\lambda I - T$ è biiettivo.

Sia $\lambda \in h([a,b])$. Se $g = 1$, f non appartiene a $C([a,b])$; quindi $\lambda I - T$ non è suriettivo.

Pertanto,

$$\lambda \in \sigma(T) \iff \exists\, t \in [a,b] : \quad h(t) = \lambda \iff \lambda \in h([a,b]).$$

Per $\lambda \in \rho(T)$, l'inverso $(\lambda I - T)^{-1}$ è l'operatore di moltiplicazione per la funzione $\frac{1}{\lambda-h}$.

Esempio. Siano $X = L^2([a,b])$ e $T : X \to X$ definito da $(Tf)(x) = x \cdot f(x)$ (cioè T è l'operatore di moltiplicazione per la funzione $h(x) = x$).

$$C := \max\{|a|,|b|\} \Rightarrow |(Tf)(x)| \leqslant C|f(x)| \quad \forall\, x \in [a,b] \Rightarrow \|T\|_{\mathscr{L}(X)} \leqslant C.$$

Per $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(x-\lambda)\, f(x) = 0 \text{ q.o. } [a,b] \Rightarrow f(x) = 0 \text{ q.o. } [a,b] \Leftrightarrow f = 0 \Leftrightarrow \ker(\lambda I - T) = \{0\},$$

cioè $\lambda I - T$ è sempre iniettivo. Per $g \in X$,

$$(\lambda I - T)f = g \Leftrightarrow f(x) = \frac{g(x)}{\lambda - x}, \quad \text{q.o. } [a,b].$$

Se $\lambda \notin [a,b]$, $\frac{1}{\lambda-x}$ è continua su $[a,b]$ e quindi f è ben definita ed appartiene a X. Quindi $\lambda I - T$ è suriettivo e $\lambda \in \rho(T)$.

Sia allora $\lambda \in [a,b]$. Se $g \equiv 1$, f non appartiene ad X; quindi $\lambda I - T$ non è suriettivo. Ma se $g \equiv 0$ in un intorno di λ in $[a,b]$, f è ben definita ed appartiene a X. Tali g sono dense in X. Infatti, posto, per $n \gg 1$, $g_n = g \cdot \left[1 - \chi_{(\lambda-\frac{1}{n},\lambda+\frac{1}{n})}\right]$, χ_E funzione caratteristica di $E \subseteq \mathbb{R}$, $g \in X$, si ha $g_n \equiv 0$ in un intorno di λ, $g_n \in X$, e, per il Teorema della Convergenza Dominata, $\|g_n - g\|_X \xrightarrow{n\to+\infty} 0$. Pertanto, $\operatorname{im}(\lambda I - T)$ è densa in X. Concludiamo che $\lambda \in \sigma_c(T)$ per ogni $\lambda \in [a,b]$ e quindi $\sigma(T) = \sigma_c(T) = [a,b]$.

4.3 Teorema. *Sia $T \in \mathscr{L}(X)$, X Banach. Allora*

a) $\rho(T) \subseteq \mathbb{C}$ *è aperto*, $\sigma(T) \subseteq \mathbb{C}$ *è chiuso. Inoltre*

$$\sigma(T) \subseteq \big\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqslant \|T\|\big\}.$$

b) $\|(\lambda I - T)^{-1}\| \geqslant \dfrac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T))}$ *per ogni* $\lambda \in \rho(T)$.

Dimostrazione. Sia $\lambda_0 \in \rho(T)$ e $\varepsilon := 1/\|(\lambda_0 I - T)^{-1}\|$.

$\lambda I - T = (\lambda_0 I - T) + (\lambda - \lambda_0)I = (\lambda_0 I - T)\big(I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1}\big)$

$|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon \Rightarrow \|(\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1}\| < 1$

$\overset{3.2}{\Rightarrow} \lambda I - T$ invertibile $\forall\ \lambda \in U_\varepsilon(\lambda_0)$

$$\Rightarrow U_\varepsilon(\lambda_0) \subseteq \rho(T) \Rightarrow \begin{cases} \rho(T) \text{ aperto, } \sigma(T) = \mathbb{C}\backslash\rho(T) \text{ chiuso,} \\ \operatorname{dist}(\lambda_0, \sigma(T)) \geqslant \varepsilon = 1/\|(\lambda_0 I - T)^{-1}\| \end{cases}$$

$|\lambda| > \|T\| \Rightarrow \|T/\lambda\| < 1 \overset{3.2}{\Rightarrow} (\lambda I - T) = \lambda(I - T/\lambda)$ invertibile. ∎

4.4 Esempio. *a) Sia $T \in \mathscr{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ definito da $T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$.*

Allora $0 \in \sigma_r(T)$ perché $\ker(0 \cdot I - T) = \ker T = \{0\}$ e $\operatorname{im}(0 \cdot I - T) = \operatorname{im} T = \{x \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid x_1 = 0\}$ non è densa in $\ell^2(\mathbb{N})$.

b) Sia $T \in \mathscr{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ definito da $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3 \ldots)$.

Allora $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqslant 1\}$ e λ è un autovalore se e solo se $|\lambda| < 1$. Infatti:

$\|T\| = 1 \Rightarrow \sigma(T) \subseteq \{|\lambda| \leqslant 1\}$

$(x_2, x_3 \ldots) = T(x_1, x_2, \ldots) = \lambda(x_1, x_2, \ldots) \iff (x_1, x_2, x_3 \ldots) = x_1(1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$

$(1, \lambda, \lambda^2, \ldots) \in \ell^2 \iff \sum_j |\lambda|^{2j} < +\infty \iff |\lambda|^2 < 1 \iff |\lambda| < 1$ (*serie geometrica*).

$$\left.\begin{array}{l} \{|\lambda| < 1\} \subseteq \sigma(T) \\ \sigma(T) \textit{ chiuso} \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma(T) = \{|\lambda| \leqslant 1\}$$

4.5 Teorema. *$T \in \mathscr{L}(H)$ autoaggiunto $\Rightarrow \sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Sia $\lambda = \alpha + i\beta$ con $\beta \neq 0$.

$\Rightarrow \|(\lambda I - T)x\|^2 = (\alpha x + i\beta x - Tx, \alpha x + i\beta x - Tx) = \|\alpha x - Tx\|^2 + \|\beta x\|^2.$

$\Rightarrow \|(\lambda I - T)x\| \geqslant |\beta|\|x\| \quad \forall\ x \in H.$

$\Rightarrow \lambda I - T$ iniettivo.

$\operatorname{im}(\lambda I - T)$ è chiuso: Sia $y_k = (\lambda I - T)x_k \to y$.

$\|x_k - x_\ell\| \leqslant \frac{1}{|\beta|}\|(\lambda I - T)(x_k - x_\ell)\| = \frac{1}{|\beta|}\|y_k - y_\ell\|. \Rightarrow (x_k)$ successione di Cauchy

$\Rightarrow \exists\, x \in H: \quad x_k \to x \Rightarrow y = \lim_{k\to+\infty}(\lambda I - T)x_k = (\lambda I - T)x \Rightarrow y \in \operatorname{im}(\lambda I - T)$.

$\lambda I - T$ normale:

$$(\lambda I - T)(\lambda I - T)^* = (\lambda I - T)(\overline{\lambda} I - T) = (\overline{\lambda} I - T)(\lambda I - T) = (\lambda I - T)^*(\lambda I - T)$$

$\Rightarrow (\operatorname{im}(\lambda I - T))^\perp = \ker(\lambda I - T)^* \overset{1.7,b)}{=} \ker(\lambda I - T) = \{0\}$.

$\Rightarrow H = \{0\}^\perp = (\operatorname{im}(\lambda I - T))^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{im}(\lambda I - T)} = \operatorname{im}(\lambda I - T)$.

$\Rightarrow \lambda I - T$ invertibile. ■

4.6 Teorema. *Sia $T \in \mathscr{L}(H)$ autoaggiunto. Siano $\lambda_1 \neq \lambda_2$ due autovalori di T. Allora:*

$$u_1 \in \ker(\lambda_1 I - T),\ u_2 \in \ker(\lambda_2 I - T) \Rightarrow u_1 \perp u_2.$$

Dimostrazione. Grazie al fatto che $T = T^*$ e $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, troviamo

$$\lambda_1(u_1, u_2) = (Tu_1, u_2) = (u_1, Tu_2) = \lambda_2(u_1, u_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(u_1, u_2) = 0.$$

Pertanto, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow (u_1, u_2) = 0$. ■

4.2 Lo spettro degli operatori compatti autoaggiunti

La teoria spettrale per operatori compatti autoaggiunti si basa sul seguente risultato:

4.7 Teorema. *Sia $T \in \mathscr{L}(H)$ autoaggiunto. Valgono:*

a) Almeno uno dei valori $-\|T\|$ o $\|T\|$ appartiene a $\sigma(T)$.

b) Se $T \in \mathscr{K}(H)$ allora almeno uno dei valori $-\|T\|$ o $\|T\|$ è un autovalore di T.

Dimostrazione: Il caso $T = 0$ è banale, quindi assumiamo $\|T\| > 0$.

Teorema 1.8: $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)|$

$\Rightarrow \exists\, (x_n) \subseteq H : \|x_n\| = 1\ \forall\, n$ e $|(Tx_n, x_n)| \xrightarrow{n\to+\infty} \|T\|$.

$(Tx, x) \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \Rightarrow$ Spdg[4] $(Tx_n, x_n) \xrightarrow{n\to+\infty} \alpha \neq 0$ con $\alpha = -\|T\|$ o $\alpha = \|T\|$
(altrimenti passiamo ad una sottosuccessione).

$0 \leqslant \|(T - \alpha I)x_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 - 2\alpha(Tx_n, x_n) + \alpha^2 \leqslant 2\alpha^2 - 2\alpha(Tx_n, x_n) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

$\Rightarrow \|(T - \alpha I)x_n\| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

a) Supponiamo $\alpha \in \rho(T)$. Allora $1 = \|x_n\| \leqslant \|(T - \alpha I)^{-1}\|\|(T - \alpha I)x_n\| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ ↯

[4] Senza perdere di generalità.

b) T compatto $\Rightarrow$ Spdg $\exists\, y \in H: \quad Tx_n \xrightarrow{n\to+\infty} y$
(altrimenti passiamo ad una sottosuccessione)
$\Rightarrow x_n = \frac{1}{\alpha}\Big((\alpha I - T)x_n + Tx_n\Big) \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{\alpha}y$
$\Rightarrow y \xleftarrow{n\to+\infty} Tx_n \xrightarrow{n\to+\infty} T\Big(\frac{1}{\alpha}y\Big) = \frac{1}{\alpha}Ty \Rightarrow Ty = \alpha y.$
$|\alpha| = \|\alpha x_n\| \xrightarrow{n\to+\infty} \|y\| \Rightarrow \|y\| = |\alpha| > 0 \Rightarrow y \neq 0.$ ■

4.8 Teorema (Teorema spettrale)**.** *Sia $T \in \mathscr{K}(H)$ autoaggiunto e* $\dim H = +\infty$*. Allora*

$$\sigma(T) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\}$$

con un numero finito o infinito di autovalori reali $\lambda_k \neq 0$ con autospazi $V_k := \ker(\lambda_k I - T)$ di dimensione finita. Nel caso di un numero infinito di autovalori, $\lambda_k \xrightarrow{k\to+\infty} 0$. Unendo le base ortonormali di $\ker T$ e di tutti i V_k, si ottiene una base ortonormale di H.

Dimostrazione. Notiamo:

- Teorema 4.5: $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.
- $0 \in \sigma(T)$ perché altrimenti $I = T^{-1}T \in \mathscr{K}(H)$ ↯ (Corollario 2.9)
- $0 \neq \lambda \in \sigma(T) \Rightarrow \lambda$ autovalore con $\dim\ker(\lambda I - T) < +\infty$ (per l'Alternativa di Fredholm).

Ci serve il seguente

> **Lemma.**[5] Sia $T \in \mathscr{K}(H)$ autoaggiunto e V un sottospazio di H con $T(V) \subseteq V$. Allora $T(V^\perp) \subseteq V^\perp$ e $T|_{V^\perp} \in \mathscr{K}(V^\perp)$ autoaggiunto con $\|T|_{V^\perp}\| \leqslant \|T\|$.

Teorema 4.7 $\Rightarrow \exists\, \lambda_1 \in \{-\|T\|, \|T\|\}: \quad V_1 = \ker(\lambda_1 I - T) \neq \{0\}$.
Abbiamo $H = V_1 \oplus H_1$ con $H_1 := V_1^\perp$ e $T(V_1) \subseteq V_1$.
Lemma $\Rightarrow T_1 := T|_{H_1} \in \mathscr{K}(H_1)$ autoaggiunto, $\|T_1\| \leqslant \|T\|$.
Supponiamo $T_1 \neq 0$.
Teorema 4.7 $\Rightarrow \exists\, \lambda_2 \in \{-\|T_1\|, \|T_1\|\}: \quad \ker(\lambda_2 I - T_1) \neq \{0\}$.
$\lambda_2 \neq \lambda_1$ perché altrimenti

$$\ker(\lambda_2 I - T_1) = \ker(\lambda_1 I - T_1) \subseteq H_1 \cap \ker(\lambda_1 I - T) = V_1^\perp \cap V_1 = \{0\} \ ↯ .$$

Teorema 4.6 $\Rightarrow \ker(\lambda_2 I - T) \subseteq V_1^\perp = H_1 \Rightarrow \ker(\lambda_2 I - T_1) = V_2$.
Abbiamo $H_1 = V_2 \oplus H_2$ con $H_2 := V_2^\perp$ (complementare in H_1) e $T_2 := T|_{H_2}$.
Nota che $H = V_1 \oplus H_1 = (V_1 \oplus V_2) \oplus H_2$, cioè $H_2 = (V_1 \oplus V_2)^\perp$ (complementare in H).
Iterazione di questo procedimento genera una successione (che, eventualmente, assume solo una quantità finita di valori distinti) di autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, diversi tra di loro con

[5] Veda Esercizio 2.2.

(i) $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n| \geqslant \ldots > 0$

(ii) $V_n = \ker(\lambda_n I - T)$, $H_n = (V_1 \oplus \ldots \oplus V_n)^\perp$ e $\lambda_{n+1} = \pm\|T|_{H_n}\|$.

Si verifica necessariamente una delle due situazioni trattate di seguito.

Primo caso: La procedura si ferma, cioè $T|_{H_n} = 0$ per un $n \in \mathbb{N} \Rightarrow H_n \subseteq \ker T$.

$x \in \ker T$ e $y \in V_k \Rightarrow \lambda_k(y,x) = (Ty,x) = (y,Tx) = 0 \overset{\lambda_k \neq 0}{\Rightarrow} x \perp V_k$

$\Rightarrow \ker T \subseteq (V_1 \oplus \ldots \oplus V_n)^\perp = H_n$.

$\Rightarrow H_n = \ker T$ e $H = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n \oplus \ker T$.

Secondo caso: La procedura non si ferma.

$\Rightarrow \exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \quad x_n \in V_n,\ \|x_n\| = 1$.

$T \in \mathscr{K}(H) \overset{\text{Teorema 2.8}}{\Rightarrow} \exists$ sottosuccessione convergente (Tx_{n_k}).

$Tx_n = \lambda_n x_n$ e $x_n \perp x_m$ per $n \neq m \Rightarrow \lambda_{n_k}^2 + \lambda_{n_\ell}^2 = \|Tx_{n_k} - Tx_{n_\ell}\|^2 \xrightarrow{k,\ell\to+\infty} 0$

$$\left.\begin{array}{l}(|\lambda_n|) \text{ decrescente, quindi convergente} \\ |\lambda_{n_k}| \xrightarrow{k\to+\infty} 0\end{array}\right\} \Rightarrow |\lambda_n| \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \Rightarrow \lambda_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Sia $\{e_1, e_2, \ldots\}$ ottenuta dall'unione delle basi di tutti i V_k e sia $\widetilde{H} = \overline{\operatorname{span}\{e_1, e_2, \ldots\}}$.

Come sopra: $\ker T \subseteq \operatorname{span}\{e_1, e_2, \ldots\}^\perp = \widetilde{H}^\perp$.

Sia $x \in \widetilde{H}^\perp$.

$\Rightarrow x \in V_n^\perp = H_n$ per ogni n e $\|Tx\| = \|T|_{H_n} x\| \leqslant \|T|_{H_n}\|\|x\| = |\lambda_{n+1}|\|x\| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

$\Rightarrow x \in \ker T$.

Concludiamo quindi che $\ker T = \widetilde{H}^\perp$ e $H = \widetilde{H} \oplus \ker T$. ■

4.9 Esempio. *Sia* $T \in \mathscr{K}(\ell^2(\mathbb{N}))$ *con* $T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, x_2/2, x_3/3, \ldots)$. *Ovviamente* 0 *non è un autovalore. Gli autovalori sono* $1, 1/2, 1/3, \ldots$ *con autovettori* $e_1, e_2, e_3, \ldots$.

4.10 Corollario. *Sia* $T \in \mathscr{K}(H)$ *autoaggiunto. Allora* H *ha una base ortonormale di autovettori* $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. *Se* $Tx_j = \lambda_j x_j$ *per ogni* j, *allora*

$$Tx = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j (x, x_j) x_j \qquad \forall\, x \in H \qquad (\textit{forma diagonale di } T).$$

Il teorema spettrale rimane parzialmente valido per un operatore compatto non autoaggiunto oppure in uno spazio di Banach: lo spettro è numerabile ed è composto da 0 e solo autovalori con autospazi di dimensione finita. 0 è l'unico eventuale punto di accumulazione.

4.3 Lo spettro degli operatori di rango finito

Un operatore $T \in \mathscr{L}(H)$ di rango finito $n \geqslant 1$ ha la forma

$$\boxed{Tx = \sum_{j=1}^{n} (x, y_j) x_j \qquad \forall\, x \in H}$$

con $x_j, y_j \in H$. Supponiamo che sia $x_1, \ldots, x_n$ sia $y_1, \ldots, y_n$ siano linearmente indipendenti.[6] Allora

$$\operatorname{im} T = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle, \qquad \ker T = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle^{\perp}.$$

Determiamo gli altri autovalori. Gli autovettori appartengono necessariamente a $\operatorname{im} T$. Dobbiamo quindi studiare

$$T : \operatorname{im} T \longrightarrow \operatorname{im} T.$$

Possiamo utilizzare tutti i mezzi dell'algebra lineare. La rappresentazione di T rispetto alla base $x_1, \ldots, x_n$ di $\operatorname{im} T$ è la matrice

$$\mathbf{T} := (\mathbf{t}_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = ((x_j, y_i))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} (x_1, y_1) & \cdots & (x_n, y_1) \\ \vdots & & \vdots \\ (x_1, y_n) & \cdots & (x_n, y_n) \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di T sono quelli di $\mathbf{T}$ che corrispondono agli zeri del polinomio caratteristico. Risulta

$$\boxed{\sigma(T) = \{0\} \cup \{\text{autovalori di } \mathbf{T}\} = \{0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\},}$$

dove i λ_j non devono essere necessariamente diversi fra di loro (in caso di zeri di molteplicità piu grande di 1). Se $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ è un autovettore di $\mathbf{T}$ per l'autovalore λ_k, allora $x = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$ soddisfa $Tx = \lambda_k x$.

4.11 Esempio. *Sia T un operatore integrale in $A \subset \mathbb{R}^N$ con nucleo $k(x,y) = \sum_{j=1}^{n} r_j(x) \overline{s_j(y)}$,*

$$(Tf)(x) = \sum_{j=1}^{n} r_j(x) \int_A f(y) \overline{s_j(y)}\, dy, \qquad x \in A.$$

Supponiamo che $r_1, \ldots, r_n$ e $s_1, \ldots, s_n$ siano linearmente indipendenti. Gli autovalori di T sono 0 e gli autovalori della matrice $(\mathbf{t}_{ij})$ con

$$\mathbf{t}_{ij} = \int_A r_j(x) \overline{s_i(x)}\, dx.$$

[6] Questo non è una limitazione: Secondo Lemma 2.2, dato $T \in \mathscr{F}(H)$, possiamo scegliere gli x_i come base ortogonale di $\operatorname{im} T$ e $y_i := T^* x_i$. $\sum_i \alpha_i y_i = 0$ implica $\sum_i \alpha_i x_i \in \ker T^* = (\operatorname{im} T)^{\perp}$. Allora $\sum_i \alpha_i x_i = 0$ e quindi $\alpha_i = 0$ per tutti i.

Per $\lambda \notin \sigma(T)$ esiste $(\lambda I - T)^{-1}$. Sia data $y \in H$. Cerchiamo $x \in H$ con

$$(\lambda I - T)x = y \iff \lambda x - Tx = y \iff \lambda x - \sum_{j=1}^{n}(x, y_j)x_j = y.$$

Passando al prodotto interno con y_i per tutti gli i, troviamo il sistema

$$\lambda(x, y_i) - \sum_{j=1}^{n}(x, y_j)(x_j, y_i) = (y, y_i), \qquad i = 1, \dots, n.$$

In forma matriciale questo significa

$$(\lambda I - \mathbf{T})\begin{pmatrix}(x, y_1)\\ \vdots \\ (x, y_n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(y, y_1)\\ \vdots \\ (y, y_n)\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}(x, y_1)\\ \vdots \\ (x, y_n)\end{pmatrix} = (\lambda I - \mathbf{T})^{-1}\begin{pmatrix}(y, y_1)\\ \vdots \\ (y, y_n)\end{pmatrix}.$$

Quindi, definendo

$$\begin{pmatrix}b_1(y, \lambda)\\ \vdots \\ b_n(y, \lambda)\end{pmatrix} := (\lambda I - \mathbf{T})^{-1}\begin{pmatrix}(y, y_1)\\ \vdots \\ (y, y_n)\end{pmatrix},$$

troviamo la soluzione

$$\boxed{(\lambda I - T)^{-1}y = \frac{1}{\lambda}y + \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n} b_j(y, \lambda)x_j.}$$

4.12 Esempio. *Con la notazione dell'Esempio 4.11 e $g \in L^2(A)$ troviamo*

$$[(\lambda I - T)^{-1}g](x) = \frac{g(x)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n} b_j(g, \lambda)r_j(x).$$

4.13 Esempio. *Studiare, in $L^2([0, 2\pi])$, l'equazione integrale*

$$\lambda f(x) - \int_0^{2\pi} k(x, y)f(y)\,dy = g(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,$$

dove $k(x, y) = \sin x \sin y + 2\cos x \cos y$. Nella notazione introdotta sopra, $n = 2$ e

$$r_1(x) = s_1(x) = \sin x, \quad r_2(x) = s_2(x) = \sqrt{2}\cos x.$$

In particolare, l'operatore $(Tf)(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} k(x, y)f(y)\,dy$ è autoaggiunto.

Calcoliamo $\mathbf{T} = \begin{pmatrix}\pi & 0\\ 0 & 2\pi\end{pmatrix}$, che ha autovalori π e 2π, con rispettivi autospazi $\langle(1, 0)\rangle$ e $\langle(0, 1)\rangle$. Risulta $\sigma(T) = \{0, \pi, 2\pi\}$ con

$$\ker T = \langle s_1, s_2\rangle^{\perp}, \quad \ker(\pi I - T) = \langle s_1\rangle, \quad \ker(2\pi - T) = \langle s_2\rangle.$$

Per $\lambda \notin \{0, \pi, 2\pi\}$ *calcoliamo*

$$\begin{pmatrix} b_1(g,\lambda) \\ b_2(g,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/(\lambda-\pi) & 0 \\ 0 & 1/(\lambda-2\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (g,s_1)_{L^2} \\ (g,s_2)_{L^2} \end{pmatrix}.$$

Risulta

$$\begin{aligned} f(x) = [(\lambda I - T)^{-1} g](x) &= \frac{1}{\lambda} g(x) + \frac{(g,s_1)_{L^2}}{\lambda(\lambda-\pi)} \sin x + \frac{\sqrt{2}(g,s_2)_{L^2}}{\lambda(\lambda-2\pi)} \cos x \\ &= \frac{1}{\lambda} g(x) + \frac{\sin x}{\lambda(\lambda-\pi)} \int_0^{2\pi} g(y) \sin y \, dy + \frac{2\cos x}{\lambda(\lambda-2\pi)} \int_0^{2\pi} g(y) \cos y \, dy. \end{aligned}$$

4.4 Esercizi

Esercizio 4.1. *Sia* $T : \mathscr{C}([-1,1]) \to \mathscr{C}([-1,1])$ *l'operatore di moltiplicazione per la funzione* $h \in \mathscr{C}([-1,1])$*, cioè* $(Tf)(x) = h(x)f(x)$*. Nei seguenti casi calcolare spettro, autovalori e autofunzioni di* T *:*

a) $h(x) = 2x$.

b) $h(x) = 0$ *per* $x \leqslant 0$, $h(x) = x$ *per* $x > 0$.

Esercizio 4.2. *Sia* $T \in \mathscr{L}(H)$*. Dimostrare:*

a) $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)} = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$.

b) T *unitario* $\Rightarrow \sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

Esercizio 4.3. *Sia* $T \in \mathscr{L}(\ell^2)$ *con* $T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$*. Dimostrare che* $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqslant 1\}$ *e che* T *non ha nessun autovalore.*

Esercizio 4.4. *Determinare autovalori, autofunzioni e risolvente degli operatori integrali in* L^2 *con nucleo* k *:*

a) $k(x,y) = xy$ *in* $[0,1]$,

b) $k(x,y) = xy + x^2y^2$ *in* $[-1,1]$,

c) $k(x,y) = x - y$ *in* $[0,1]$.

Trovare la soluzione f *in* L^2 *della seguente equazione integrale:*

d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin y \, f(y) \, dy - f(x) = x$ *in* $[0, 2\pi]$.

Esercizio 4.5. *Siano* $T \in \mathscr{L}(H)$ *e* $\lambda, \mu \in \rho(T)$*. Dimostrare che*

$$R(\mu, T) - R(\lambda, T) = (\lambda - \mu) R(\lambda, T) R(\mu, T).$$

Esercizio 4.6. *Sia* $T \in \mathscr{L}(H)$*. Dimostrare che* $\lambda \mapsto R(\lambda, T) : \rho(T) \to \mathscr{L}(H)$ *è continua.*

Esercizio 4.7. *Sia* $T \in \mathscr{K}(H)$ *autoaggiunto tale che* $(Tx, x) \geqslant 0$ *per ogni* $x \in H$*. Dimostrare che esiste un* $S \in \mathscr{L}(H)$ *tale che* $S^2 = T$*.*

Esercizio 4.8. *Sia* $T \in \mathscr{K}(H)$ *autoaggiunto e* $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ *base ortonormale di autovettori,* $Tx_j = \lambda_j x_j$*. Sia* $\lambda \notin \sigma(T)$ *e* $y \in H$*. Dimostrare che*

$$(\lambda I - T)^{-1} y = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_j}(y, x_j)x_j = \frac{1}{\lambda} y + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\lambda_j}{\lambda - \lambda_j}(y, x_j)x_j.$$

Esercizio 4.9. *Sia* K *un operatore integrale con nucleo* $k \in L^2(A \times A)$*, cf. Esempio* 2.5*. Supponiamo che* $k(s,t) = \overline{k(t,s)}$*, quindi* K *è autoaggiunto. Sia* $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ *una base ortonormale di* $L^2(A)$ *di autofunzioni di* K *con* $Ke_j = \lambda_j e_j$ *per ogni* j*. Dimostrare che*

$$\|k\|^2_{L^2(A\times A)} = \sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j|^2.$$

5 Operatori di Toeplitz

Di cosa si tratta? Studiamo i cosidetti operatori di Toeplitz nello spazio di Hardy delle funzioni 2π-periodiche. Caraterizziamo gli operatori Fredholm e troviamo una "formula topologica" che esprime l'indice in forma di un indice di avvolgimento.

Lo spazio $L^2(\mathbb{S}^1) = L^2_{2\pi-per}(\mathbb{R})$ degli funzioni 2π-periodiche e integrabili al quadrato su $[0, 2\pi]$ con prodotto interno

$$(f, g)_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

ha la base ortonormale $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, dove

$$\boxed{e_n(x) = e^{inx}, \qquad n \in \mathbb{Z}.}$$

Ogni $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ ha la rappresentazione (serie di Fourier, convergenza in $L^2(\mathbb{S}^1)$)

$$\boxed{f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e_n, \qquad \widehat{f}(n) = (f, e_n)_{L^2(\mathbb{S}^1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x)\, dx.}$$

Se $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1) = \mathscr{C}_{2\pi-per}(\mathbb{R})$, cioè una funzione continua e 2π-periodica, allora

$$M_\varphi f := \varphi \cdot f, \qquad f \in L^2(\mathbb{S}^1),$$

definisce l'operatore $M_\varphi \in \mathscr{L}(L^2(\mathbb{S}^1))$ con $\|M_\varphi\|_{\mathscr{L}(L^2(\mathbb{S}^1))} \leqslant \|\varphi\|_\infty$:

$$\|M_\varphi f\|^2_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(x) f(x)|^2\, dx \leqslant \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |\varphi(x)|^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = \|\varphi\|^2_\infty \|f\|^2_{L^2}.$$

Inoltre è facile da vedere che $(M_\varphi)^* = M_{\overline{\varphi}}$.

Nota: Vale perfino $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$. Infatti, sia $|\varphi(x_0)| = \|\varphi\|$ (Weierstrass!). Sia χ_h l'estensione 2π-periodica della funzione caratteristica dell'intervallo $[x_0 - h, x_0 + h]$ moltiplicato per $1/\sqrt{2h}$. Allora $\|\chi_h\|_{L^2} = 1/\sqrt{2\pi}$ e, vista la continuità di φ,

$$\frac{\|M_\varphi \chi_h\|^2_{L^2}}{\|\chi_h\|^2_{L^2}} = \frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} |\varphi(x)|^2\, dx \xrightarrow{h \to 0+} |\varphi(x_0)|^2 = \|\varphi\|^2_\infty.$$

5.1 Definizione (Hardy space). *Si definisce*

$$H^2(\mathbb{S}^1) = \big\{ f \in L^2(\mathbb{S}^1) \mid \widehat{f}(n) = 0 \text{ per ogni } n < 0 \big\} = \overline{\operatorname{span}\{e_0, e_1, e_2, e_3, \dots\}}.$$

Denotiamo con $P = P_{H^2(\mathbb{S}^1)}$ la proiezione ortogonale con $\operatorname{im} P = H^2(\mathbb{S}^1)$, cioè

$$\boxed{P\Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{f}(n)e_n.}$$

Ovviamente

$$(I-P)\Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e_n\Big) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \hat{f}(n)e_n.$$

5.2 Definizione. *Sia $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$. Allora*

$$T_\varphi f = PM_\varphi f = P(\varphi f), \qquad f \in H^2(\mathbb{S}^1),$$

definisce $T_\varphi \in \mathscr{L}(H^2(\mathbb{S}^1))$, il cosidetto operatore di Toeplitz associato a φ.

Valgono $\|T_\varphi\| \leqslant \|P\|\|M_\varphi\| \leqslant \|\varphi\|_\infty$ e $(T_\varphi)^* = T_{\overline{\varphi}}$, dato che

$$(T_\varphi f, g) = (PM_\varphi, g) = (f, M_{\overline{\varphi}}Pg) = (Pf, M_{\overline{\varphi}}g) = (f, PM_{\overline{\varphi}}g) = (f, T_{\overline{\varphi}}g),$$

per ogni $f = Pf, g = Pg \in H^2(\mathbb{S}^1)$.

5.1 Proprietà di Fredholm

5.3 Teorema. *$\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1) \Rightarrow (I-P)M_\varphi P,\ PM_\varphi(I-P) \in \mathscr{K}(L^2(\mathbb{S}^1))$.*

Dimostrazione. **1. passo:** Sia $\varphi = e_L$ con $L \in \mathbb{Z}$. Allora

$$M_\varphi Pf = e_L \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{f}(n)e_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{f}(n)e_{n+L} = \sum_{n=L}^{+\infty} \hat{f}(n-L)e_n.$$

$L \geqslant 0 \Rightarrow (I-P)M_\varphi P = 0.$

$L < 0 \Rightarrow (I-P)M_\varphi Pf = \sum_{n=L}^{-1} \hat{f}(n-L)e_n \in \langle e_L, e_{L+1}, \dots, e_{-1}\rangle.$

$\Rightarrow (I-P)M_\varphi P \in \mathscr{F}(L^2(\mathbb{S}^1)) \subseteq \mathscr{K}(L^2(\mathbb{S}^1)).$

2. passo: Sia $\varphi = p = \sum_{n=-N}^{N} a_n e_n$ un polinomio trigonometrico.

1. passo $\Rightarrow (I-P)M_pP = \sum_{n=-N}^{N} a_n(I-P)M_{e_n}P \in \mathscr{F}(L^2(\mathbb{S}^1)).$

3. passo: Sia $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$. Teorema di Stone-Weierstrass $\Rightarrow$

Esiste successione (p_k) di polinomi trigonometrici con $\|p_k - \varphi\|_\infty \xrightarrow{k\to+\infty} 0$.

$\Rightarrow \|(I-P)M_{p_k}P - (I-P)M_\varphi P\| = \|(I-P)M_{p_k-\varphi}P\| \leqslant \|p_k - \varphi\|_\infty \xrightarrow{k\to+\infty} 0.$

$\Rightarrow (I-P)M_\varphi P$ è limite di operatori di rango finito, quindi è compatto.

Teoremi 1.5 e 2.6 $\Rightarrow PM_\varphi(I-P) = \big((I-P)M_\varphi^* P\big)^* = \big((I-P)M_{\overline{\varphi}}P\big)^*$ compatto. ∎

5.4 Corollario. *$\varphi, \psi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1) \Rightarrow T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$ modulo $\mathscr{K}(H^2(\mathbb{S}^1))$.*

Dimostrazione. $M_{\varphi\psi} = M_\varphi M_\psi$ e Teorema 5.3 $\Rightarrow$

$$S := PM_{\varphi\psi} - PM_\varphi PM_\psi = PM_\varphi(I-P)M_\psi \in \mathscr{K}(L^2(\mathbb{S}^1)).$$

$S(H^2(\mathbb{S}^1)) \subseteq H^2(\mathbb{S}^1) \Rightarrow T_\varphi T_\psi - T_{\varphi\psi} = S|_{H^2(\mathbb{S}^1)} \in \mathscr{K}(H^2(\mathbb{S}^1)).$ ∎

5.5 Lemma. *Per $h \in \mathbb{R}$ e $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ definiamo $(S_h f)(x) := f(x+h)$. Allora:*

i) $S_h \in \mathscr{L}(L^2(\mathbb{S}^1))$ e $S_h \in \mathscr{L}(H^2(\mathbb{S}^1))$ sono invertibili con $(S_h)^{-1} = S_{-h}$.

ii) $S_h P = P S_h$ e $T_{S_h\varphi} = S_h T_\varphi S_{-h}$.

Dimostrazione. Calcoliamo i coefficienti di Fourier di $S_h f$:

$$\widehat{S_h f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x+h)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in(y-h)} f(y)\,dy = e^{inh}\widehat{f}(n).$$

Seguono i) e $S_h P = P S_h$. Inoltre, $S_h(f\cdot g) = (S_h f)\cdot(S_h g)$ e $S_h S_{-h} = I$ implicano

$$M_{S_h\varphi} f = S_h\varphi \cdot f = S_h(\varphi \cdot S_{-h} f) = (S_h M_\varphi S_{-h}) f.$$

$\Rightarrow M_{S_h\varphi} = S_h M_\varphi S_{-h} \Rightarrow T_{S_h\varphi} = PM_{S_h\varphi} = PS_h M_\varphi S_{-h} = S_h P M_\varphi S_{-h} = S_h T_\varphi S_{-h}$ ∎

5.6 Teorema. *Sia $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$. Allora:*

$$T_\varphi \in \mathrm{Fred}(H^2(\mathbb{S}^1)) \iff \varphi \text{ non ha degli zeri.}$$

Dimostrazione. "$\Leftarrow$": $\psi := 1/\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$.

Corollario 5.4 $\Rightarrow T_\varphi T_\psi \equiv T_{\varphi\psi} = T_1 = I$ modulo operatori compatti.

Analogamente: $T_\psi T_\varphi = I$ modulo operatori compatti.

$\Rightarrow T_\varphi$ invertibile modulo operatori compatti.

Teorema 3.9 $\Rightarrow T_\varphi$ Fredholm.

"$\Rightarrow$": **1. passo:** Supponiamo che $\varphi \equiv 0$ in $[x_0 - \pi/N, x_0 + \pi/N]$ per un $N \in \mathbb{N}$.

Definiamo

$$\varphi_n = S_{-2\pi n/N}\varphi, \qquad n = 0, \dots, N-1.$$

$\varphi_n \equiv 0$ in $[(x_0 + 2\pi n/N) - \pi/N, (x_0 + 2\pi n/N) + \pi/N] \Rightarrow \varphi_0 \cdot \ldots \cdot \varphi_{N-1} \equiv 0$ in $\mathbb{R}$.

Corollario 5.4 $\Rightarrow T_{\varphi_0} \cdots T_{\varphi_{N-1}} = T_{\varphi_0 \cdot \ldots \cdot \varphi_{N-1}} = 0$ modulo operatori compatti.

Lemma 5.5 $\Rightarrow T_{\varphi_k} = S_{-2\pi k/N} T_\varphi S_{2\pi k/N}$ Fredholm.

Teorema 3.15 $\Rightarrow T_{\varphi_0} \cdots T_{\varphi_{N-1}}$ Fredholm.

$\Rightarrow T_{\varphi_0} \cdots T_{\varphi_{N-1}} \in \mathscr{K}(H^2(\mathbb{S}^1)) \cap \mathrm{Fred}(H^2(\mathbb{S}^1))$ ↯

(dato che $\mathscr{K}(H) \cap \mathrm{Fred}(H) = \varnothing$ per ogni H con $\dim H = +\infty$).

2. passo: Supponiamo che esista un x_0 tale che $\varphi(x_0) = 0$.

Possiamo supporre che $x_0 = 0$ (altrimenti consideriamo $S_{-x_0}\varphi$).

Sia χ_k 2π-periodica con $\chi_k(x) = \begin{cases} 0 & : 0 \leqslant x \leqslant 1/2k \\ 2kx - 1 & : 1/2k \leqslant x \leqslant 1/k \\ 1 & : 1/k \leqslant x \leqslant 2\pi \end{cases}$.

$\chi_k \varphi \xrightarrow{k \to +\infty} \varphi$ uniformemente:

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |(\varphi - \chi_k \varphi)(x)| = \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |(1 - \chi_k)(x)||\varphi)(x)| \leqslant \max_{0 \leqslant x \leqslant 1/k} |\varphi(x)| \xrightarrow{k \to +\infty} 0.$$

$$\varphi(x) - \chi_k(x)\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & : 0 \leqslant x \leqslant 1/2k \\ 2(1 - kx)\varphi(x) & : 1/2k \leqslant x \leqslant 1/k \\ 0 & : 1/k \leqslant x \leqslant 2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |(\varphi - \chi_k \varphi)(x)| \leqslant \max_{0 \leqslant x \leqslant 1/k} |\varphi(x)| \xrightarrow{k \to +\infty} 0.$$

$\Rightarrow \|T_{\chi_k \varphi} - T_\varphi\| \leqslant \|\chi_k \varphi - \varphi\|_\infty \xrightarrow{k \to +\infty} 0$.

$\mathrm{Fred}(H^2(\mathbb{S}^1))$ aperto in $\mathscr{L}(H^2(\mathbb{S}^1)) \Rightarrow \exists\, K \quad \forall\, k \geqslant K: \quad T_{\chi_k \varphi} \in \mathrm{Fred}(H^2(\mathbb{S}^1))$ ↯

(è in contraddizione con l'affermazione del primo passo) ∎

Usermo il seguente risultato senza dimostrazione:

Indice di avvolgimento: Sia $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$ senza zeri. Allora esistono un unico numero $L \in \mathbb{Z}$ e una $\psi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$ tale che

$$\boxed{\varphi(x) = e^{iLx} e^{\psi(x)} \qquad \forall\, x.}$$

$\tau(\varphi) := L$ è detto indice di avvolgimento di φ. Se $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{S}^1)$ vale

$$\boxed{\tau(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\, dx.}$$

5.7 Teorema (Gohberg-Krein)**.** *Sia $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$ senza zeri. Allora* $\operatorname{ind} T_\varphi = -\tau(\varphi)$.

Dimostrazione. Definiamo $\varphi_t(x) := e^{iLx}e^{t\psi(x)}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

φ_t non ha zeri $\overset{5.6}{\Rightarrow}$ T_{φ_t} Fredholm.

$t \mapsto \varphi_t : [0,1] \to \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$ continuo.

$\Rightarrow t \mapsto T_{\varphi_t} : [0,1] \to \mathscr{L}(L^2(\mathbb{S}^1))$ continuo.

Teorema 5.6, Teorema 3.13, a) $\Rightarrow \operatorname{ind} T_\varphi = \operatorname{ind} T_{\varphi_1} = \operatorname{ind} T_{\varphi_0} = \operatorname{ind} T_{e_L}$.

$L \geqslant 0$: Sia $f \in H^2(\mathbb{S}^1)$.

$$T_{e_L} f = P\Big(e_L \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n) e_n\Big) = \sum_{n=L}^{+\infty} \widehat{f}(n-L) e_n.$$

$$\Rightarrow T_{e_L} \text{ iniettivo e } \operatorname{im} T_{e_L} = \Big\{ f \in H^2(\mathbb{S}^1) \mid \widehat{f}(0) = \ldots = \widehat{f}(L-1) = 0 \Big\}$$

$$\Rightarrow \operatorname{codim} \operatorname{im} T_{e_L} = L \text{ e } \operatorname{ind} T_{e_L} = -L = -\tau(\varphi).$$

$L < 0$: $(T_{e_L})^* = T_{\overline{e_L}} = T_{e_{-L}}$

$$\Rightarrow \operatorname{ind} T_{e_L} \overset{3.10}{=} -\operatorname{ind}(T_{e_L})^* = -\operatorname{ind} T_{e_{-L}} \overset{-L>0}{=} -(-(-L)) = -L = -\tau(\varphi).$$ ■

5.2 Lo spettro degli operatori di Toeplitz (complemento)

Nel seguito scriviamo $\widehat{f}(n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x)\,dx$, $n \in \mathbb{Z}$, per $f \in L^1(\mathbb{S}^1)$ (si noti che $L^q(\mathbb{S}) \subseteq L^p(\mathbb{S})$ se $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$).

5.8 Lemma. *Sia $f \in L^1(\mathbb{S}^1)$. Allora valgono:*

a) $\widehat{f}(n) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f = 0$ *quasi ovunque.*

b) f *a valori reali e* $\widehat{f}(n) = 0 \quad \forall\, n \geqslant 1 \Rightarrow f \equiv \widehat{f}(0)$ *quasi ovunque.*

Dimostrazione. a) Ipotesi $\Rightarrow \displaystyle\int_0^{2\pi} p(x) f(x)\,dx = 0$ per tutti i polinomi trigonometrici.

$$\text{Stone-Weierstrass Theorem} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \varphi(x) f(x)\,dx = 0 \qquad \forall\, \varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$$

$\Rightarrow f = 0$ quasi ovunque (veda Teorema 6.12).

b) Sia $c = \widehat{f}(0)$ e $g := f - c$.

$\Rightarrow \widehat{g}(n) = \widehat{f}(n) - (c, e_n)_{L^2} = 0 \quad \forall\, n \geqslant 0$.

g a valori reali $\Rightarrow \widehat{g}(-n) = \overline{\widehat{g}(n)} = 0 \quad \forall\, n \geqslant 0$.

a) $\Rightarrow g = 0$ quasi ovunque.

■

5.9 Lemma. *Siano $f, g \in L^2(\mathbb{S}^1)$. Allora $fg \in L^1(\mathbb{S}^1)$ e* $\widehat{fg}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n-k)\widehat{g}(k)$.

DIMOSTRAZIONE. Disuguaglianza di Hölder $\Rightarrow$ $fg \in L^1(\mathbb{S}^1)$ con $\|fg\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}\|g\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}$

$$|\widehat{fg}(n)| \leqslant \int_0^{2\pi} |f(x)||g(x)|\,dx \leqslant 2\pi\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}\|g\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}.$$

Se $s_n(f,g)$ denota la serie, allora

$$|s_n(f,g)| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n-k)||\widehat{g}(k)| \leqslant \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n-k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}(k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}\|g\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}.$$

Quindi

$$(f,g) \mapsto T(f,g) := \widehat{fg}(n) - s_n(f,g) : L^2(\mathbb{S}^1) \oplus L^2(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathbb{C}$$

è bilineare e continua, cioè esiste $C \geqslant 0$ con

$$|T(f,g)| \leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}\|g\|_{L^2(\mathbb{S}^1)} \qquad \forall\ f,g \in L^2(\mathbb{S}^1).$$

Per $p = e_r$ e $q = e_s$ con $r, s \in \mathbb{Z}$ vale

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{pq}(n) = (e_{r+s}, e_n)_{L^2} = \delta_{r+s,n} \qquad \text{(simbolo di Kronecker)}, \\ s_n(p,q) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{p}(n-k)\widehat{q}(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{n-k,r}\delta_{k,s} = \delta_{n-s,r} = \delta_{r+s,n} \end{array}\right\} \Rightarrow T(p,q) = 0.$$

T bilineare $\Rightarrow$ $T(p,q) = 0$ se p, q polinomi trigonometrici.

Siano $f, g \in L^2(\mathbb{S}^1)$ arbitrari e $p_N := \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)e_k$, $q_N := \sum_{k=-N}^{N} \widehat{g}(k)e_k$.

$\Rightarrow$ $p_N \xrightarrow{N\to+\infty} f$ e $q_N \xrightarrow{N\to+\infty} g$ in $L^2(\mathbb{S}^1)$

T continuo $\Rightarrow$ $0 = T(p_N, q_N) \xrightarrow{N\to+\infty} T(f,g)$

$\Rightarrow$ $T(f,g) = 0 \Rightarrow \widehat{fg}(n) = s_n(f,g)$ per ogni $f, g \in L^2(\mathbb{S}^1)$. ■

5.10 Lemma. *Sia $\{0\} \neq V \subseteq L^2(\mathbb{S}^1)$ sottospazio chiuso con $M_{e_1}(V) \subseteq V$ e $\bigcap_{n\geqslant 0} M_{e_n}(V) = \{0\}$. Allora esiste $u \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$ tale che*

$$V = M_u(H^2(\mathbb{S}^1)) = \{uf \mid f \in H^2(\mathbb{S}^1)\}, \qquad |u| = 1 \textit{ quasi ovunque.}$$

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo $M_n := M_{e_n}$ per l'operatore di moltiplicazione per e_n. Si noti che tutti M_n sono operatori unitari in $L^2(\mathbb{S}^1)$ con $M_n^* = M_{-n}$ e $M_mM_n = M_{m+n}$.

$\Rightarrow$ $V_n := M_n(V)$ sottospazio chiuso di $L^2(\mathbb{S}^1)$.

Vale $V_{n+1} = M_1(V_n) \quad \forall\, n$, $V \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots$ e $\bigcap_{n\geqslant 1} V_n = \{0\}$.

Sia $V = V_1 \oplus U_1$ con $U_1 := V_1^{\perp}$ (complementare in V).

$U_1 \neq \{0\}$ perché altrimenti $V = V_1$ e quindi $V_n = V \quad \forall\, n$ ↯

Step 1: Sia $u \in U_1$ con $\|u\|_{L^2} = 1$.

$\Rightarrow u \in V$ e $u \in V_n^{\perp} \quad \forall\, n \geqslant 1$.

$\Rightarrow u \perp M_n u = e_n u \quad \forall\, n \geqslant 1$.

$\Rightarrow 0 = (u, e_n u)_{L^2} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e_{-n} u\overline{u}\, dx = \widehat{|u|^2}(n) \quad \forall\, n \geqslant 1$.

Lemma 5.8.b) $\Rightarrow |u|^2 = \text{cost}$ q.o.

$\|u\|_{L^2} = 1 \Rightarrow |u| = 1$ q.o.

Step 2: Mostriamo che $U_1 = \operatorname{span}\{u\}$. Sia $w \in U_1$ con $u \perp w$.

$$\left.\begin{array}{r} V = V_1 \oplus U_1 \\ M_n \text{ unitario} \end{array}\right\} \Rightarrow V_n = V_{n+1} \oplus U_{n+1} \text{ con } U_{n+1} := M_n(U_1) = V_{n+1}^{\perp} \quad \forall\, n \text{ (complementare in } V_n).$$

$n \geqslant 0 \Rightarrow M_n u \perp M_n w$ e $M_n u \in V_{n+1}^{\perp} \subset V_m^{\perp} \quad \forall\, m \geqslant n+1 \Rightarrow M_n u \perp M_m w \quad \forall\, m \geqslant n \geqslant 0$

Scambiare ruoli di u e $w \Rightarrow M_n u \perp M_m w \quad \forall\, n \geqslant m \geqslant 0$.

$\Rightarrow 0 = (M_n u, M_m w)_{L^2} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e_{n-m} u\overline{w}\, dx = \widehat{u\overline{w}}(m-n) \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N}_0$

Lemma 5.8.a) $\Rightarrow u\overline{w} = 0$ q.o.

$|u| = 1$ q.o. $\Rightarrow w = 0$ q.o.

Step 3: $U := \bigcup_{n\geqslant 1} U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ è uno sottospazio di V.

Sia $x \in V$ e $x \in U^{\perp}$.

$\Rightarrow x \in V \cap U_1^{\perp} \Rightarrow x \in V_1^{\perp\perp} = V_1$.

$\Rightarrow x \in V_1 \cap U_2^{\perp} \Rightarrow x \in V_2^{\perp\perp} = V_2$.

Iterazione $\Rightarrow x \in \bigcap_{n\geqslant 1} V_n = \{0\}$

$\Rightarrow U^{\perp} = \{0\}$ (complementare in V) $\Rightarrow V = \overline{U}$.

Step 4: $V = \overline{U} = \overline{\operatorname{span}\{u, ue_1, ue_2, \dots\}} = M_u(\overline{\operatorname{span}\{e_0, e_1, e_2, \dots\}}) = M_u(H^2(\mathbb{S}^1))$. ∎

5.11 Teorema (F. e M. Riesz)**.** $0 \neq f \in H^2(\mathbb{S}^1) \Rightarrow N_f := \{x \in [0, 2\pi] \mid f(x) = 0\}$ *ha misura zero.*

Dimostrazione. $V := \{g \in H^2(\mathbb{S}^1) \mid g|_{N_f} \equiv 0\}$ è sottospazio di $L^2(\mathbb{S}^1)$ con $M_{e_1}(V) \subset V$ e

$$M_{e_n}(V) \subset M_{e_n}(H^2(\mathbb{S}^1)) = \overline{\operatorname{span}\{e_n, e_{n+1}, e_{n+2}, \dots\}}.$$

Lemma 5.10 $\Rightarrow V = M_u(H^2(\mathbb{S}^1))$ con $|u| = 1$ q.o.

$1 = e_0 \in H^2(\mathbb{S}^1) \Rightarrow u = M_u(e_0) \in V \Rightarrow u = 0$ su N_f.

$\Rightarrow N_f$ ha misura zero. ∎

5.12 Teorema (Coburn's Lemma)**.** *Sia $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$ senza zeri. Allora* $\ker T_\varphi = \{0\}$ *oppure* $\ker T_\varphi^* = \{0\}$.

Dimostrazione. Supponiamo il contrario.

$\Rightarrow \exists\, 0 \neq f, g \in H^2(\mathbb{S}^1): \quad T_\varphi f = T_{\overline{\varphi}} g = 0.$

$\Rightarrow P(\varphi f) = P(\overline{\varphi} g) = 0$

$\Rightarrow \widehat{\varphi f}(n) = 0$ e $\widehat{\varphi \overline{g}}(-n) = \overline{\widehat{\overline{\varphi} g}(n)} = 0 \quad \forall\, n \geqslant 0$.

$\widehat{\overline{g}}(n) = \overline{\widehat{g}(-n)} = 0 \quad \forall\, n \geqslant 1 \overset{\text{Lemma 1}}{\Rightarrow} \widehat{(\varphi f)\overline{g}}(n) = 0 \quad \forall\, n \geqslant 0.$

$\widehat{f}(n) = 0 \quad \forall\, n \leqslant -1 \overset{\text{Lemma 1}}{\Rightarrow} \widehat{(\varphi \overline{g}) f}(n) = 0 \quad \forall\, n \leqslant 0.$

$(\varphi \overline{g}) f = (\varphi f)\overline{g} \Rightarrow \widehat{\varphi f \overline{g}}(n) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$

Lemma 2 $\Rightarrow \varphi \overline{g} f = 0$.

Teorema $\Rightarrow \varphi = 0$ quasi ovunque ↯ (infatti, $f, g \neq 0$ q.o.). ∎

5.13 Teorema. *Sia $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$. Allora:*

$$T_\varphi \text{ invertibile} \iff T_\varphi \text{ Fredholm e } \operatorname{ind} T_\varphi = 0.$$

Dimostrazione. "$\Rightarrow$": Ovvio.

"$\Leftarrow$": Teorema 5.6 $\Rightarrow \varphi$ non ha zeri.

$0 = \operatorname{ind} T_\varphi = \dim\ker T_\varphi - \dim\ker T_\varphi^*$.

Teorema 5.12 $\Rightarrow \dim\ker T_\varphi = 0$

Alternativa di Fredholm $\Rightarrow T_\varphi$ biiettivo, cioè invertibile. ∎

5.14 Corollario. *Sia $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$. Allora:*

$$\sigma(T_\varphi) = \varphi(\mathbb{S}^1) \cup \{\lambda \mid \tau(\lambda - \varphi) \neq 0\}.$$

Dimostrazione. Teoremi 5.6, 5.7, 5.13 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \lambda I - T_\varphi = T_{(\lambda-\varphi)} \text{ invertibile} &\iff \lambda - \varphi(x) \neq 0 \quad \forall\, x \text{ e } \tau(\varphi - \lambda) = 0 \\ &\iff \lambda \notin \varphi(\mathbb{S}^1) \text{ e } \tau(\varphi - \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Quindi: $\lambda \in \sigma(T) \iff \lambda \in \varphi(\mathbb{S}^1)$ oppure $\tau(\varphi - \lambda) \neq 0$. ∎

6 Distribuzioni (funzioni generalizzate)

Di cosa si tratta? Le distribuzioni sono funzionali continui su opportuni spazi di funzioni. Generalizzano il concetto di funzione, nel senso che qualsiasi funzione localmente integrabile (in particolare, continua) può essere identificata con una distribuzione e che molte operazioni standard sulle funzioni si estendono alle distribuzioni. Per questo motivo, le distribuzioni sono anche chiamate *funzioni generalizzate*. Per alcuni aspetti, le distribuzioni si comportano addirittura meglio delle funzioni. Per esempio, qualsiasi distribuzione può essere (parzialmente) derivata tutte le volte che si desidera. Questo rende le distribuzioni un ambiente molto adatto allo studio delle *equazioni alle derivate parziali*.

Nel seguito Ω denota un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ con $n \geqslant 1$.

Scriveremo $K \subset\subset \Omega$ se K è compatto e $K \subset \Omega$.

Ricordiamo che un multi-indice è un vettore $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ con $\alpha_j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Per una funzione $f = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ di classe $\mathscr{C}^N(\Omega)$ si scrive[7]

$$\partial^\alpha f = \partial_x^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \qquad (\text{“}\alpha\text{-derivata parziale”}),$$

con $|\alpha| = |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| \leqslant N$. Si scrive anche, per $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ multi-indice, $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, dove è sottinteso l'abuso di notazione[8] $x^0 \equiv 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

6.1 Le funzioni test

Il supporto di una funzione continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ e l'insieme

$$\boxed{\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}}.}$$

6.1 Esempio. $f(x) = \sin x \Rightarrow \operatorname{supp} f = \overline{\mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$.

6.2 Definizione (Spazio delle funzioni test)**.** *Definiamo*

$$\mathscr{D}(\Omega) = \big\{\phi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp} \phi \subset\subset \Omega\big\}.$$

$\mathscr{D}(\Omega)$ è uno spazio vettoriale (con la solita addizione di funzioni e la solita moltiplicazione di funzioni per numeri complessi). Infatti,

$$\operatorname{supp}(\phi + \psi) \subseteq \operatorname{supp} \phi \cup \operatorname{supp} \psi, \qquad \operatorname{supp}(\lambda\phi) \subseteq \operatorname{supp} \phi \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

[7] L'ordine di applicazione delle derivate parziali in $\partial^\alpha f$ non è rilevante, grazie al Teorema di Schwarz, per le ipotesi $f \in \mathscr{C}^N(\Omega)$ e $|\alpha| \leqslant N$.

[8] Cioè, il fattore x_j non è presente nel monomio x^α se $\alpha_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Si noti anche che $\mathscr{D}(\Omega) \subseteq \mathscr{D}(\tilde{\Omega}) \subseteq \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ per $\Omega \subseteq \tilde{\Omega}$.

6.3 Esempio (Mollificatore)**.** $\rho(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & : |x| < 1 \\ 0 & : |x| \geqslant 1. \end{cases}$

Con $c := \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx$ *sia* $\rho_\varepsilon(x) = \dfrac{\varepsilon^{-n}}{c} \rho\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$, $\varepsilon > 0$.

$\Rightarrow 0 \leqslant \rho_\varepsilon \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *con* $\operatorname{supp} \rho = \{x \mid |x| \leqslant \varepsilon\}$ *e* $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)\, dx = 1.$

6.4 Lemma. *Sia* $K \subset\subset \Omega$*. Esiste* $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ *con* $0 \leqslant \phi \leqslant 1$ *e* $\phi \equiv 1$ *in un intorno di* K*.*

Dimostrazione. Sia $K_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(x, K) \leqslant \varepsilon\}$, $\chi_\varepsilon = \chi_{K_\varepsilon}$ la funzione caratteristica e

$$\phi_\varepsilon(x) := (\chi_{2\varepsilon} * \rho_\varepsilon)(x) = \int_{|y| \leqslant \varepsilon} \chi_{2\varepsilon}(x-y) \rho_\varepsilon(y)\, dy.$$

Dai risultati della prima parte (Capitolo 2) $\Rightarrow \phi_\varepsilon \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$|y| \leqslant \varepsilon \Rightarrow \chi_{2\varepsilon}(x-y)\rho_\varepsilon(y) = \begin{cases} \rho_\varepsilon(y) & : x \in K_\varepsilon \\ 0 & : x \notin K_{3\varepsilon} \end{cases} \Rightarrow \phi_\varepsilon \equiv 1$ su K_ε e supp $\phi_\varepsilon \subseteq K_{3\varepsilon}$.

Basta scegliere $\varepsilon > 0$ tale che $K_{3\varepsilon} \subseteq \Omega$ e prendere $\phi := \phi_\varepsilon$. ∎

6.5 Definizione. *In* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *definiamo le norme* $\|\cdot\|_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ *da*

$$\|\phi\|_j := \max_{x \in \mathbb{R},\, |\alpha| \leqslant j} |\partial_x^\alpha \phi(x)|.$$

6.6 Definizione. *Una successione* $(\phi_k)_k \subseteq \mathscr{D}(\Omega)$ *si dice convergente a* $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ *se*

i) $\exists\, K \subset\subset \Omega \quad \forall\, k: \quad \operatorname{supp} \phi_k \subseteq K$,

ii) $\|\phi_k - \phi\|_j \xrightarrow{k \to +\infty} 0$ *per ogni* $j = 0, 1, 2, \ldots$

Scriviamo $\phi_k \xrightarrow{k \to +\infty} \phi$ *oppure* $\lim\limits_{k \to +\infty} \phi_k = \phi$*; si nota che allora anche* $\operatorname{supp} \phi \subseteq K$*.*

Condizione *ii*) significa che $\partial^\alpha \phi_k \xrightarrow{k \to +\infty} \partial^\alpha \phi$ uniformemente in $\mathbb{R}^n$ per tutte α.

6.7 Lemma. *Sia* $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ *e* $\phi_k \xrightarrow{k \to +\infty} \phi$*. Allora* $\partial^\beta \phi_k \xrightarrow{k \to +\infty} \partial^\beta \phi$*.*

Dimostrazione. Sia $L := |\beta|$ e (ϕ_k) come nella Definizione 6.6. Allora

i) $\phi_k = 0$ on $\Omega \backslash K \Rightarrow \partial^\beta \phi_k = 0$ on $\Omega \backslash K \Rightarrow \operatorname{supp} \partial^\beta \phi_k \subseteq K$ per ogni k,

ii) $\|\partial^\beta \phi_k - \partial^\beta \phi\|_j \leqslant \|\phi_k - \phi\|_{j+L} \xrightarrow{k\to+\infty} 0$ per ogni j.

Quindi $\partial^\beta \phi_k \xrightarrow{k\to+\infty} \partial^\beta \phi$. ∎

6.2 Distribuzioni

6.8 Definizione. *Una mappa $T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ si dice distribuzione in/su Ω se*

i) T è lineare.

ii) Per ogni successione $(\phi_k)_k$ convergente in $\mathscr{D}(\Omega)$ vale $\lim_{k\to+\infty} T(\phi_k) = T\Big(\lim_{k\to+\infty} \phi_k\Big)$.

Definiamo

$$\mathscr{D}'(\Omega) = \{T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C} \mid T \text{ distribuzioni}\}.$$

Si nota che $\mathscr{D}'(\Omega)$ è uno sottospazio dello spazio vettoriale delle mappe lineari $\mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$.

6.9 Teorema (Disuguaglianza di controllo)**.** *Sia $T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ lineare. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a) $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$

b) $\forall\, K \subset\subset \Omega \quad \exists\, C = C(K) \geqslant 0 \quad \exists\, j = j(K) \in \mathbb{N} \quad \forall_{\substack{\phi\in\mathscr{D}(\Omega),\\ \operatorname{supp}\phi\subseteq K}} : \qquad |T(\phi)| \leqslant C\|\phi\|_j$

Dimostrazione. **b)** $\Rightarrow$ **a)** : $\phi_k \to \phi$ in $\mathscr{D}(\Omega)$ come in Definizione 6.6.

$\Rightarrow |T(\phi_k) - T(\phi)| = |T(\phi_k - \phi)| \leqslant C(K)\|\phi_k - \phi\|_{j(K)} \xrightarrow{k\to+\infty} 0$.

a) $\Rightarrow$ **b)** : Dato T supponiamo che b) non sia vero per un $K \subset\subset \Omega$.

$\Rightarrow \forall\, k \in \mathbb{N} \quad \exists_{\substack{\phi_k\in\mathscr{D}(\Omega),\\ \operatorname{supp}\phi_k\subseteq K}} : \quad |T(\phi_k)| > k\|\phi_k\|_k$.

$\psi_k := \phi_k / T(\phi_k) \Rightarrow T(\psi_k) = 1$ e $\|\psi_k\|_k = \frac{\|\phi_k\|_k}{|T(\phi_k)|} < \frac{1}{k}$.

$\Rightarrow \|\psi_k\|_j \overset{k\geqslant j}{\leqslant} \|\psi_k\|_k < \frac{1}{k} \xrightarrow{k\to+\infty} 0$ per ogni j.

$\Rightarrow \psi_k \to 0$ in $\mathscr{D}(\Omega)$, ma $T(\psi_k) = 1 \not\to 0$. $\lightning$ ∎

6.10 Definizione. *$T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ si chiama distribuzione di ordine finito se in b) del Teorema 6.9 si può scegliere un j simultaneamente per tutti i $K \subset\subset \Omega$. Il j più piccolo possibile è detto ordine di T.*

6.11 Esempio (Distribuzioni regolari)**.** *Sia $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, cioè*

$$\int_K |f(x)|\, dx < +\infty \qquad \forall\, K \subset\subset \Omega;$$

(f *si dice* localmente integrabile *in/su* Ω). *Definiamo*

$$\boxed{T_f : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}, \quad T_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)\,dx.}$$

T_f *è una distribuzione di ordine* 0 :

$$\begin{aligned} |T_f(\phi)| &\leqslant \int_\Omega |f(x)||\phi(x)|\,dx = \int_K |f(x)||\phi(x)|\,dx \\ &\leqslant \max_{x\in\mathbb{R}^n} |\phi(x)| \cdot \int_K |f(x)|\,dx = C_K \|\phi\|_0 \qquad \forall \, {\scriptstyle \phi\in\mathscr{D}(\Omega), \atop \scriptstyle \operatorname{supp}\phi\subseteq K}. \end{aligned}$$

T_f *è detta* distribuzione regolare, f *è la* densità *di* T_f.

6.12 Teorema. *Sia* f *localmente integrabile in* Ω. *Allora*

$$T_f(\phi) = 0 \quad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(\Omega) \iff f = 0 \text{ quasi ovunque in } \Omega.$$

In particolare, la densità di una distribuzione regolare è determinata unicamente (quasi ovunque).

Dimostrazione. L'implicazione"$\Leftarrow$" è immediata. Dimostriamo l'implicazione "$\Rightarrow$".

Passo I. Sia $\Omega = \mathbb{R}^n$ e $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Dai risultati della prima parte (Capitolo 2): $f * \rho_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

$(f * \rho_\varepsilon)(x) = \int f(y)\rho_\varepsilon(x-y)\,dy = T_f(\rho_\varepsilon(x-\cdot)) = 0 \quad \forall\, x$

$\Rightarrow f = 0$ in $L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f = 0$ quasi ovunque.

Passo II. Sia $K \subset\subset \Omega$ arbitrario e $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ con $\psi \equiv 1$ su K.

$\psi f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (identificando ψf con la sua estensione a 0 da Ω a tutto $\mathbb{R}^n$)

$T_{\psi f}(\phi) = T_f(\psi\phi) = 0 \quad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$

Passo I $\Rightarrow f = 0$ quasi ovunque in K.

$K_n := \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n\backslash\Omega) \geqslant \frac{1}{n},\ |x| \leqslant n\}$

$\Rightarrow K_n \subset\subset \Omega$ e $\Omega = \cup_n K_n$

$f = 0$ quasi ovunque in K_n per ogni $n \Rightarrow f = 0$ quasi ovunque in Ω

(si utilizzi che l'unione numerabile di insiemi di misura nulla è un insieme di misura nulla). ∎

6.13 Esempio (Distribuzione δ, distribuzione di Dirac). *Definiamo*

$$\boxed{\delta : \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C} \colon \phi \mapsto \delta(\phi) = \phi(0).}$$

Allora $\delta \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *di ordine* 0 :

$$|\delta(\phi)| = |\phi(0)| \leqslant \max_{x\in\mathbb{R}^n} |\phi(x)| = \|\phi\|_0 \qquad \forall\ \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

Analogamente, la distribuzione δ *centrata in* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *è*

$$\delta_{x_0} : \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}, \quad \delta_{x_0}(\phi) = \phi(x_0).$$

δ *non è una distribuzione regolare*:

Supponiamo $\delta = T_f$. *Sia* $\rho \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *come nell'Esempio* 6.3.

$\Rightarrow \phi_k(x) = \rho(kx) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$1 = \phi_k(0) = \delta(\phi_k) = T_f(\phi_k) = \int_{B_1(0)} f(x)\phi_k(x)\, dx \xrightarrow{k\to+\infty} 0,$$

grazie al Teorema della convergenza dominata. $\lightning$

6.14 Esempio (Valor principale di $1/x$)**.** $x \mapsto 1/x$ *non appartiene a* $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$*, quindi non definisce una distribuzione regolare su* $\mathbb{R}$. *Comunque*

$$\boxed{T(\phi) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\phi(x)}{x}\, dx, \qquad \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}),}$$

definisce $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$*, detta valor principale di* $1/x$. *Si scrive anche* $\text{pv-}\frac{1}{x}$ *o* $\text{vp}\frac{1}{x}$. *Infatti:*

Taylor $\Rightarrow \phi(x) = \phi(0) + x r_\phi(x)$ *con* $r_\phi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. *Allora*

$$\begin{aligned} T(\phi) &= \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} \frac{\phi(x)}{x}\, dx + \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{[-1,1]\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\phi(x)}{x}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(x)\phi(x)\, dx + \int_{-1}^{1} r_\phi(x)\, dx =: T_u(\phi) + S(\phi) \end{aligned}$$

perché

$$\int_{[-1,1]\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\phi(0)}{x}\, dx = \phi(0)\Big(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\, dx\Big) = 0,$$

e dove

$$u(x) = \begin{cases} 0 & : |x| \leqslant 1 \\ 1/x & : |x| > 1 \end{cases} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}).$$

Inoltre,

$$|r_\phi(x)| = \Big|\int_0^1 \phi'(tx)\, dt\Big| \leqslant \max_{s\in\mathbb{R}} |\phi'(s)| \leqslant \|\phi\|_1 \qquad \forall\ \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

Quindi $T = T_u + S$ *è una distribuzione di ordine* 1.

6.15 Definizione. *Una successione $(T_k)_k \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ si dice convergente a $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ se*

$$T_k(\phi) \xrightarrow{k\to+\infty} T(\phi) \qquad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

6.16 Esempio. *Con il mollificatore di Esempio 6.3 vale $T_{\rho_{1/k}} \xrightarrow{k\to+\infty} \delta$:*

$$\begin{aligned} |T_{\rho_{1/k}}(\phi) - \delta(\phi)| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \rho_{1/k}(x)\phi(x)\,dx - \phi(0) \Big| = \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \rho_{1/k}(x)\big(\phi(x) - \phi(0)\big)\,dx \Big| \\ &\leqslant \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ |x|\leqslant 1/k}} |\phi(x) - \phi(0)| \xrightarrow{k\to+\infty} 0. \end{aligned}$$

6.3 Prodotto di distribuzioni e funzioni di classe $\mathscr{C}^\infty$

Siano $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $a \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$. Allora T_f e T_{af} sono distribuzioni regulari e

$$T_{af}(\phi) = \int_\Omega a(x)f(x)\phi(x)\,dx = T_f(a\phi).$$

Si osserva che nell'espressione a destra possiamo sostituire T_f con una distribuzione generale T. Ciò suggerisce la definizione successiva.

6.17 Teorema (e Definizione). *Siano $a \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ e $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Allora*

$$(aT)(\phi) = T(a\phi), \qquad \phi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

definisce una distribuzione $aT \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

6.4 Derivazione di distribuzioni

Sia $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Allora $T_f, T_{f'}$ sono distribuzioni regolari. È naturale definire la prima derivata di T_f come $T_{f'}$. Per un qualsiasi $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ vale

$$T_{f'}(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\phi(x)\,dx = \underbrace{f(x)\phi(x)\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x)\,dx = -T_f(\phi').$$

Mentre $T_{f'}(\phi)$ ha senso solo se f è differenziabile, l'espressione $-T_f(\phi')$ ha senso per una qualsiasi funzione f e, di più, possiamo sostituire T_f con una qualsiasi distribuzione T. Questo ci porta a definire $T' \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ con $T'(\phi) = -T(\phi')$.

6.18 Teorema (e definizione). *Sia $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{N}$. Allora*

$$T^{(k)}(\phi) := (-1)^k T(\phi^{(k)}) \qquad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$$

definisce una distribuzione $T^{(k)} = \frac{d^k}{dx^k} T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ *(la k-esima derivata di T).*

Dimostrazione. Ovviamente $T^{(k)} : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ lineare.

Sia $\phi_\ell \xrightarrow{\ell\to+\infty} \phi$.

Lemma 6.7 $\Rightarrow \phi_\ell^{(k)} \xrightarrow{\ell\to+\infty} \phi^{(k)}$.

$\Rightarrow (-1)^k T(\phi_\ell^{(k)}) \xrightarrow{\ell\to+\infty} (-1)^k T(\phi^{(k)})$. ∎

Se $f \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R})$, allora $(T_f)^{(k)} = T_{f^{(k)}}$, cioè si ottiene la derivata usuale. Se f e una funzione non necessariamente derivabile, $(T_f)^{(k)}$ si dice k-esima derivata debole oppure k-esima derivata nel senso delle distribuzioni di f. In generale, la derivata debole non è una di-stribuzione regolare.

6.19 Teorema. *Sia f una funzione di forma*

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & : x > x_0 \\ h(x) & : x < x_0 \end{cases}, \qquad g \in \mathscr{C}^1([x_0, +\infty)), \quad h \in \mathscr{C}^1((-\infty, x_0])$$

(come f è definita in x_0 non importa). Allora

$$(T_f)' = T_{f'} + \big(g(x_0) - h(x_0)\big)\delta_{x_0}, \qquad f'(x) := \begin{cases} g'(x) & : x > x_0 \\ h'(x) & : x < x_0 \end{cases}.$$

Si nota che $g(x_0) - h(x_0) = f(x_0+) - f(x_0-)$ è l'altezza del salto di f in x_0.

Dimostrazione. Per ogni $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} (T_f)'(\phi) &= -T_f(\phi') = -\int_{-\infty}^{x_0} h(x)\phi'(x)\,dx - \int_{x_0}^{+\infty} g(x)\phi'(x)\,dx \\ &= -h(x)\phi(x)\Big|_{x=-\infty}^{x=x_0} + \int_{-\infty}^{x_0} h'(x)\phi(x)\,dx - g(x)\phi(x)\Big|_{x=x_0}^{x=+\infty} + \int_{x_0}^{+\infty} g'(x)\phi(x)\,dx \\ &= (g(x_0) - h(x_0))\phi(x_0) + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\phi(x)\,dx = (g(x_0) - h(x_0))\delta_{x_0}(\phi) + T_{f'}(\phi). \end{aligned}$$

Questo finisce la dimostrazione. ∎

Il teorema precedente si generalizza a funzioni con più di un salto:

6.20 Esempio. *Sia* $f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} 1 - x^2 & : -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & : |x| > 1 \end{cases}$. *Derivare T_f:*

Prima derivata: $(T_f)' = T_{f'}$, $\qquad f'(x) = \begin{cases} -2x & : -1 < x < 1 \\ 2x & : |x| > 1 \end{cases}$

Seconda derivata: $(T_f)'' = (T_{f'})' = T_{f''} + 4\delta_1 + 4\delta_{-1}$, $\quad f''(x) = \begin{cases} -2 & : -1 < x < 1 \\ 2 & : |x| > 1 \end{cases}$

Terza derivata: $(T_f)''' = (T_{f''})' + 4\delta_1' - 4\delta_{-1}' = 4\delta_1 - 4\delta_{-1} + 4\delta_1' + 4\delta_{-1}'$

Un operatore a coefficienti costanti di secondo ordine

$$\boxed{P = a\frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d}{dx} + c \qquad (a, b, c \in \mathbb{C})}$$

si può pensar come operatore lineare nell'ambito delle distribuzioni:

$$\boxed{P : \mathscr{D}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{D}'(\mathbb{R}), \quad PT = aT'' + bT' + cT.}$$

Le soluzioni dell'equazione omogenea $aT'' + bT' + cT = 0$ sono le ben note soluzioni classiche $y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, cioè le distribuzioni regolari T_y con $ay''+by'+cy = 0$ (non ci sono soluzioni aggiuntive in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ – per le equazioni a derivate parziali invece alle soluzioni classiche si aggiungono nuovo soluzioni distribuzionali). Dimostriamo questo fatto per equazioni di primo ordine:

Teorema. Siano $I = (\alpha, \beta)$, $f \in \mathscr{C}(I)$ e $T \in \mathscr{D}'(I)$ con $T' + bT = T_f$. Allora $\exists\, y \in \mathscr{C}^1(I)$ tale che $y'(x) + by(x) = f(x)$ in I e $T = T_y$.

Dimostrazione. **Passo I.** Sia $T' = 0$. Sia $S = T_1 \in \mathscr{D}'(I)$, cioè $S(\phi) = \displaystyle\int_\alpha^\beta \phi(x)\,dx$.

$\psi \in \mathscr{D}(I)$ e $S(\psi) = 0$ implica $T(\psi) = 0$:

$$\Psi(x) := \int_\alpha^x \psi(t)\,dt \in \mathscr{D}(I) \text{ e quindi } T(\psi) = T(\Psi') = -T'(\Psi) = 0.$$

Scegliamo un $\phi_0 \in \mathscr{D}(I)$ con $S(\phi_0) = 1$.

$S\big(\phi - S(\phi)\phi_0\big) = S(\phi) - S(\phi)S(\phi_0) = 0 \quad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(I)$

$\Rightarrow 0 = T(\phi - S(\phi)\phi_0) = T(\phi) - S(\phi)T(\phi_0) \quad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(I)$

$\Rightarrow T(\phi) = \displaystyle\int_\alpha^\beta T(\phi_0)\phi(x)\,dx \quad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(I)$

$\Rightarrow T = T_c$ con $c = T(\phi_0)$.

Passo II. Esercizio 6.2 $\Rightarrow (e^{bx}T)' = be^{bx}T + e^{bx}T' = e^{bx}(T' + bT) = e^{bx}T_f = T_{e^{bx}f}$.

Sia $g \in \mathscr{C}^1(I)$ con $g' = e^{bx}f$.

$\Rightarrow (e^{bx}T - T_g)' = T_{e^{bx}f} - T_{g'} = 0$

Passo I $\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{C} : \quad e^{bx}T - T_g = T_c \Rightarrow T = e^{-bx}T_{(g+c)} = T_{e^{-bx}(g+c)}$

Basta scegliere $y(x) = e^{-bx}(g(x) + c)$. ∎

Si dice equazione impulsiva un'equazione non-omogenea del tipo

$$\boxed{aT'' + bT' + cT = S, \quad S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}),}$$

con S una distribuzione non regolare. Tutte le soluzioni sono della forma $T = T_y + \widehat{T}$, dove y è la generica soluzione dell'omogenea, e $\widehat{T}$ è una soluzione particolare di $PT = S$.

6.21 Definizione. *Ogni soluzione dell'equazione $PT = \delta$ è detta soluzione fondamentale per l'operatore P.*

6.22 Teorema. *Sia P come sopra con $a \neq 0$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e y la soluzione classica dell'equazione $Py = 0$ con $y(x_0) = 0$ e $y'(x_0) = 1/a$. Se*

$$f(x) := \begin{cases} 0 & : x < x_0 \\ y(x) & : x > x_0 \end{cases}$$

allora $PT_f = \delta_{x_0}$. In caxo $x_0 = 0$ si ottiene una soluzione fondamentale per P.

Dimostrazione. Si applica il Teorema 6.19 due volte:

$Tf' = T_{f'} + (0-0)\delta = T_{f'}$, dove $f'(x) = \begin{cases} 0 & : x < x_0 \\ y'(x) & : x > x_0 \end{cases}$,

$(Tf)'' = (T_{f'})' = T_{f''} + (y'(x_0) - 0)\delta = T_{f''} + \frac{1}{a}\delta_{x_0}$, dove $f''(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ y''(x) & : x > 0 \end{cases}$.

$\Rightarrow a(T_f)'' + b(T_f)' + cT_f = T_{af''+bf'+cf} + a\frac{1}{a}\delta_{x_0}$.

$(af'' + bf' + cf)(x) = \begin{cases} 0 & : x < x_0 \\ ay'' + by'(x) + cy(x) & : x > x_0 \end{cases} = 0 \Rightarrow PT_f = \delta_{x_0}$. ∎

6.23 Esempio. *Cerchiamo una soluzione fondamentale di $Py = y'' - y' - 2y$. Allora $a = b = 1$, $c = -2$ e $x_0 = 0$. Polinomio caratteristico:*

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2).$$

Quindi

$$y'' - y' - 2y = 0 \iff y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Determinare A e B :

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 0 \iff A + B = 0, \\ y'(0) = 1 \iff -A + 2B = 1 \end{array}\right\} \iff A = -1/3,\ B = 1/3.$$

Risulta la soluzione fondamentale T_f con $f(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ -\frac{1}{3}(e^{-x} - e^{2x}) & : x > 0 \end{cases}$.

6.24 Esempio. *Cerchiamo una soluzione di* $Py = y'' - 4y' + 4y = \delta_2$. *Allora* $a = 1$, $b = -4$, $c = 4$ *e* $x_0 = 2$. *Polinomio caratteristico*:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Quindi

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \iff y(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Determinare A *e* B :

$$\left.\begin{aligned} y(2) = 0 &\iff Ae^4 + 2Be^4 = 0, \\ y'(2) = 1 &\iff 2Ae^4 + 5Be^4 = 1 \end{aligned}\right\} \iff A = -2e^{-4},\ B = e^{-4}.$$

Risulta la soluzione $y = T_f$ *con* $f(x) = \begin{cases} 0 & : x < 2 \\ (x-2)e^{2(x-2)} & : x > 2. \end{cases}$

6.5 Distribuzioni ed equazioni a derivate parziali

Sia $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e α multi-indice. Analogamente alla Definizione 6.18,

$$\boxed{\partial^\alpha T(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \phi) \qquad \forall\ \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).}$$

definisce la distribuzione $\partial^\alpha T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Quindi un operatore differenziale $P = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha \partial^\alpha$, con $a_\alpha \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $|\alpha| \leqslant m$, definisce un'applicazione lineare

$$\boxed{P : \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) : T \mapsto PT = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(\partial^\alpha T).}$$

Consideriamo adesso degli operatori a coefficienti costanti, cioè tutti gli a_α sono numeri complessi, $|\alpha| \leqslant m$.

6.25 Esempio. *Con* $m = 2$ *e* $a_\alpha = \begin{cases} 1 & : \alpha \in \{2e_1, \dots, 2e_n\} \\ 0 & : \text{altrimenti} \end{cases}$ *risulta*

$$P = \sum_{k=1}^{n} \partial^{2e_k} = \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k}^2 = \partial_{x_1}^2 + \ldots + \partial_{x_n}^2 =: \Delta,$$

il cosidetto operatore di Laplace oppure Laplaciano.

6.26 Definizione. *Le soluzioni dell'equazione* $PT = \delta$ *sono dette soluzioni fondamentali per l'operatore* P.

Se $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, allora

$$(f * \phi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi(x-y)\,dy = T_f(\phi(x-\cdot)), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Questa relazione ci porta alla seguente definizione della convoluzione:

6.27 Teorema (e Definizione). *Siano $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.*

$$(T * \phi)(x) := T(\phi(x-\cdot)), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

definisce una funzione $T * \phi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Per ogni α vale $\partial^\alpha(T*\phi) = (\partial^\alpha T)*\phi = T*(\partial^\alpha\phi)$.

Dimostrazione. Sia $u(x) = (T*\phi)(x)$.

Continuità: Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fissato.

$u(x_0+h) - u(x_0) = T\big(\phi(x_0+h-\cdot) - \phi(x_0-\cdot)\big)$ per ogni $h \in \mathbb{R}^n$.

Taylor $\Rightarrow r_h(y) := \phi(x_0+h-y) - \phi(x_0-y) = h \cdot \int_0^1 \nabla\phi(x_0+th-y)\,dt$

Ovviamente $r_h \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ per ogni h. Verificheremo:

i) $\exists\ K \subset\subset \mathbb{R}^n \quad \forall^{h\in\mathbb{R}^n}_{|h|\leqslant 1}: \quad \operatorname{supp} r_h \subseteq K$,

ii) $\partial^\alpha r_h \xrightarrow{h\to 0} 0$ uniformemente in $\mathbb{R}^n$ per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Per i) si nota che $\exists\ N > 0$ tale che $\operatorname{supp}\phi \subset B_N(0)$ e

$$\begin{aligned} r_h(y) \neq 0 &\Rightarrow \exists\ 0 \leqslant t \leqslant 1: \quad \nabla\phi(x_0+th-y) \neq 0 \\ &\Rightarrow x_0+th-y \in \operatorname{supp}\phi \\ &\Rightarrow \exists\ z \in \operatorname{supp}\phi: \quad y = x_0+th-z \\ &\Rightarrow |y-x_0| \leqslant |z| + |th| < N+1 \\ &\Rightarrow y \in B_{N+1}(x_0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \operatorname{supp} r_h \subseteq K := \overline{B_{N+1}(x_0)}$.

Per ii) si nota: $|\partial_y^\alpha r_h(y)| \leqslant |h| \max_{z\in\mathbb{R}^n} |\nabla\partial^\alpha\phi(z)| \leqslant \mathrm{const}\cdot|h|$.

i), ii) $\Rightarrow r_h \xrightarrow{h\to 0} 0$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow u(x_0+h) - u(x_0) = T(r_h) \xrightarrow{h\to 0} 0$

Derivabilità parziale: Si procede in modo simile, scrivendo

$$\frac{u(x_0+\tau e_j) - u(x_0)}{\tau} - (T * \partial_j\phi)(x_0) = T(r_\tau)$$

con

$$r_\tau(y) := \frac{\phi(x_0+\tau e_j - y) - \phi(x_0-y)}{\tau} - (\partial_j\phi)(x_0-y) = \tau\int_0^1 (1-t)(\partial_j^2\phi)(x_0+t\tau e_j - y)\,dt.$$

Risulta $r_\tau \xrightarrow{\tau\to 0} 0$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ e quindi $T(r_\tau) \xrightarrow{\tau\to 0} 0$, cioè

$$\begin{aligned}\partial_j u(x_0) &= (T * \partial_j\phi)(x_0) = T((\partial_j\phi)(x_0-\cdot)) \\ &= -T\big(\partial_j[\phi(x_0-\cdot)]\big) = (\partial_j T)(\phi(x_0-\cdot)) = ((\partial_j T)*\phi)(x_0).\end{aligned}$$

Come sopra: $\partial_j u$ è continua.

L'iterazione di questo procedimento dimostra l'enunciato. ■

6.28 Esempio. *Vale $\delta * \phi = \phi$ perché*

$$(\delta * \phi)(x) = \delta(\phi(x-\cdot)) = \phi(x-0) = \phi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Se T è una soluzione fondamentale dell'operatore differenziale a coefficienti costanti P e $u := T * \phi$, si trova

$$Pu = (PT) * \phi = \delta * \phi = \phi$$

(la prima identità vale perché P ha coefficienti costanti). Quindi $T * \phi$ fornisce una soluzione dell'equazione a derivate parziali $Pu = \phi$.

6.29 Teorema (Malgrange-Ehrenpreis)**.** *Ogni operatore differenziale $P \neq 0$ a coefficienti costanti ha una soluzione fondamentale.*

6.30 Teorema. *Il Laplaciano Δ in $\mathbb{R}^2$ ha soluzione fondamentale T_f con $f(x) = \frac{1}{2\pi}\ln|x|$. Quindi una soluzione di $\Delta u = \phi$ è*

$$u(x) = (T_f * \phi)((x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(y)\phi(x-y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \phi(y)\ln|x-y|\,dy.$$

Dimostrazione. Ricordiamo la formula di Gauss-Green nel piano:

$$\int_U \operatorname{div}\mathbf{F}\,dx = \int_{\partial U} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds, \tag{6.1}$$

dove $U \subset \mathbb{R}^2$ appropriato, $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ campo vettoriale in due variabli di classe $\mathscr{C}^1$ in un intorno di U e $\mathbf{n} : \partial U \to \mathbb{R}^2$ il versore normale esterno ad U.

Formule di Green: Siano u, v funzioni di classe $\mathscr{C}^2$ in un intorno di U.

(1) $\displaystyle\int_U \Delta u = \int_{\partial U} D_{\mathbf{n}} u\,ds$ (dove $D_{\mathbf{n}}u = \nabla u\cdot\mathbf{n}$ derivata in direzione $\mathbf{n}$),

(2) $\displaystyle\int_U (u\Delta v + \nabla u\cdot\nabla v) = \int_{\partial U} uD_{\mathbf{n}}v\,ds,$

(3) $\displaystyle\int_U (u\Delta v - v\Delta u) = \int_{\partial U} (uD_{\mathbf{n}}v - vD_{\mathbf{n}}u)\,ds.$

Per la (1), applicare (6.1) a $\mathbf{F} = \nabla u$; per la (2), applicare (6.1) a $\mathbf{F} = u\nabla v$. Sia $(2')$ ottenuta dallo scambio di u e v nella (2). La differenza membro a membro $(2) - (2')$ prova la (3).

Sia $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$. Si ha quindi $\exists\, R > 0 : \quad \operatorname{supp}\phi \subseteq U := \{x \mid |x| \leqslant R\}$.

$U_\varepsilon := \{x \mid \varepsilon \leqslant |x| \leqslant R\} \Rightarrow \mathbf{n}(x) = \begin{cases} -x/\varepsilon & : |x| = \varepsilon \\ x/R & : |x| = R. \end{cases}$

$(\Delta T_f)(\phi) = T_f(\Delta\phi) = \displaystyle\int_U f(x)\Delta\phi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{U_\varepsilon} f(x)\Delta\phi(x)\,dx$, dato che $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$.

Perché $2\pi\nabla f(x) = x/|x|^2$ e $\Delta f = 0$ in $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ (Esercizio!), dalla (3) segue

$$\begin{aligned}\int_{U_\varepsilon} f(x)\Delta\phi(x)\,dx &= \int_{U_\varepsilon} [f(x)\Delta\phi(x) - \phi(x)\Delta f(x)]\,dx \\ &= \int_{\partial U_\varepsilon} [f(x)D_{\mathbf{n}}\phi(x) - \phi(x)D_{\mathbf{n}}f(x)]\,ds \\ &= \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{|x|=\varepsilon} [\phi(x) - \ln\varepsilon\nabla\phi(x)\cdot x]\,ds.\end{aligned}$$

Si ha:

$$\left|\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{|x|=\varepsilon}\phi(x)ds - \phi(0)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{|x|=\varepsilon}|\phi(x)-\phi(0)|\,ds \leqslant \max_{|x|=\varepsilon}|\phi(x)-\phi(0)| \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0,$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{|x|=\varepsilon}\ln\varepsilon\nabla\phi(x)\cdot x\,ds\right| &\leqslant \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{|x|=\varepsilon}|\ln\varepsilon||\nabla\phi(x)||x|\,ds \\ &= |\varepsilon\ln\varepsilon|\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{|x|=\varepsilon}|\nabla\phi(x)|\,ds \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0|\nabla\phi(0)| = 0.\end{aligned}$$

Ne segue $(\Delta T_f)(\phi) = \phi(0) = \delta(\phi)$, come affermato. ∎

6.6 Il supporto delle distribuzioni

Siano $S, T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $U \subseteq \Omega$ aperto. Si dice

$$\boxed{S = T \text{ in } U :\iff S(\phi) = T(\phi) \quad \forall\,\phi \in \mathscr{D}(U).}$$

6.31 Lemma. *Sia $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $\Omega_T := \bigcup_{\substack{U\subseteq\Omega \text{ aperto,} \\ T=0 \text{ in } U}} U$, cioè*

$$\boxed{\Omega_T = \{x \in \Omega \mid \exists\, U \subseteq \Omega \text{ intorno aperto di } x \text{ t.c. } T = 0 \text{ in } U\}.}$$

Allora $T = 0$ in Ω_T. Quindi Ω_T è il più grande sottoinsieme aperto di Ω dove $T = 0$.

Dimostrazione. Sia $\phi \in \mathscr{D}(\Omega_T)$ e $K := \operatorname{supp}\phi$.

K compatto $\Rightarrow \exists\, U_1, \ldots, U_N : \quad T = 0$ in $U_j,\ K \subset U_1 \cup \ldots \cup U_N$

Esistono $K_j \subset\subset U_j$ tale che $K \subset K_1 \cup \ldots \cup K_N$:

$z \in K \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, 1 \leqslant j \leqslant N : \quad \overline{B_\varepsilon(z)} \subseteq U_j$

K compatto $\Rightarrow$ Una famiglia finita di questi $B_\varepsilon(z_k)$ fornisce un ricoprimento di K.

$K_j :=$ unione finita di $\overline{B_\varepsilon(z_k)}$ del ricoprimento contenuti in U_j.

Lemma 6.4 $\Rightarrow \exists\, \psi_j \in \mathscr{D}(U_j) : \quad 0 \leqslant \psi_j \leqslant 1,\ \psi_j \equiv 1$ in un intorno di K_j.

$\phi_1 := \phi\psi_1,\ \phi_k := \phi\psi_k(1-\psi_1) \cdot \ldots \cdot (1-\psi_{k-1})$ per $k = 2, \ldots, N$

$\Rightarrow \phi_k \in \mathscr{D}(U_k)$ e $\phi - \sum_{k=1}^{\ell} \phi_k = \phi(1-\psi_1) \cdot \ldots \cdot (1-\psi_\ell)$ (induzione!)

$\ell = N \Rightarrow \phi - \sum_{k=1}^{N} \phi_k = 0 \Rightarrow T(\phi) = \sum_{k=1}^{N} T(\phi_k) = 0.$ ∎

6.32 Definizione. *Sia $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Il supporto di T è l'insieme* $\operatorname{supp} T := \Omega \setminus \Omega_T$.

6.33 Esempio. $\operatorname{supp}\delta = \{0\}$:

$\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \Rightarrow \phi(0) = 0 \Rightarrow \delta(\phi) = 0 \Rightarrow \delta = 0$ *su* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \subseteq \Omega_\delta$

δ *non è zero su tutto* $\mathbb{R}^n \Rightarrow \Omega_\delta = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \operatorname{supp}\delta = \mathbb{R}^n \setminus \Omega_\delta = \{0\}$.

6.34 Esempio. *Sia $T_f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ una distribuzione regolare. Allora $\Omega \setminus \operatorname{supp} T_f$ è il più grande sottoinsieme aperto di Ω su quale $f = 0$ quasi ovunque.*

6.7 Distribuzioni a supporto compatto (complemento)

Sia $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ con $K := \operatorname{supp} T \subset\subset \Omega$. Se $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ è una qualsiasi funzione test con $\psi \equiv 1$ in un intorno aperto di K,

$$T(\phi) = T(\psi\phi) + T((1-\psi)\phi) = T(\psi\phi) \qquad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

visto che $(1-\psi)\phi \in \mathscr{D}(\Omega \setminus \operatorname{supp} T)$ e $T = 0$ in $\Omega \setminus \operatorname{supp} T$. Osserviamo che l'espressione a destra ha senso non solo per $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ ma per un qualsiasi $\phi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$! Si può definire su $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ una *metrica* tale che una successione $(\phi_k)_k \subset \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ converge a $\phi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ se e solo se $\partial^\alpha \phi_k \xrightarrow{k\to+\infty} \partial^\alpha \phi$ uniformemente su ogni $K \subset\subset \Omega$ per ogni multi-indice α. Vale poi il seguente:

6.35 Teorema. *Sia $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ a supporto compatto in Ω. Allora esiste un'unica mappa lineare e continua $\widetilde{T} : \mathscr{C}^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ tale che*

a) $\widetilde{T}(\phi) = T(\phi)$ *per tutti* $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$,

b) $\widetilde{T}(\phi) = 0$ *per tutti* $\phi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ *con* $\phi \equiv 0$ *in un intorno aperto di* $\operatorname{supp} T$.

Si identifica T con la sua estensione e scrive ancora T al posto di $\widetilde{T}$.

6.36 Definizione. *Con $\mathscr{E}'(\Omega)$ si denota lo sottospazio di $\mathscr{D}'(\Omega)$ delle distribuzioni a supporto compatto in Ω.*

Se $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ ha senso definire $T * \phi$ con $\phi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tramite

$$(T * \phi)(x) = T(\phi(x - \cdot)), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Si può dimostrare che $T * \phi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

6.37 Lemma. *Sia $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Allora $T * \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. Esiste $r > 0$ tale che $\operatorname{supp}\phi \subset B_r(0)$.
$\Rightarrow \operatorname{supp}\phi(x - \cdot) \subset B_r(x)$.
$\operatorname{supp} T$ compatto $\Rightarrow \exists\, M \geqslant 0 \quad \forall_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ |x|\geqslant M}} : \quad B_r(x) \cap \operatorname{supp} T = \varnothing$.
$\Rightarrow \operatorname{supp}\phi(x - \cdot) \subset \mathbb{R}^n \backslash \operatorname{supp} T \quad \forall_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ |x|\geqslant M}} \Rightarrow (T * \phi)(x) = 0$ per tutti x con $|x| \geqslant M$. ∎

6.38 Teorema. *Siano $S, T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e almeno una dei due abbia supporto compatto. Allora esiste un'unica distribuzione $R \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ tale che*

$$R * \phi = S * (T * \phi) \qquad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

Scriviamo $R = S * T$. Vale $R = T * S$.

É facile vedere che $\delta * T = T * \delta = T$ per ogni $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.
La convoluzione di distribuzioni induce mappe bilineari (e continue)

$$\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) * \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) * \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) * \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n).$$

La covoluzione è commutativa e

$$(T_1 * T_2) * T_3 = T_1 * (T_2 * T_3)$$

se almeno due delle distribuzioni T_j hanno supporto compatto (associatività). Inoltre,

$$\boxed{\partial^\alpha(S * T) = (\partial^\alpha S) * T = S * (\partial^\alpha T), \qquad \alpha \in \mathbb{N}_0^n.}$$

6.39 Teorema. *Sia $P \neq 0$ un operatore differenziale a coefficienti costanti e sia E una sua soluzione fondamentale. Allora $T := E * S$ con $S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ è soluzione dell'equazione $PT = S$.*

6.8 Esercizi

Esercizio 6.1. $f(x) = \ln|x|$ *appartiene a* $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. *Dimostrare che* $(T_f)' = \text{pv-}\frac{1}{x}$.

Esercizio 6.2. *Siano* $a \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ *e* $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. *Definiamo* $aT : \mathscr{D}'(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ *tramite*

$$(aT)(\phi) = T(a\phi), \qquad \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

a) Dimostrare che $aT \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

b) Dimostrare che $(aT)' = a'\,T + a\,T'$.

Esercizio 6.3. *Sia* $P = b\frac{d}{dx} + c$ *con* $b \neq 0$. *Sia* $x_0 \in \mathbb{R}$ *e* y *la soluzione dell'equazione* $by' + cy = 0$ *con* $y(x_0) = 1/b$ *e* $f(x) := \begin{cases} 0 & : x < x_0 \\ y(x) & : x > x_0 \end{cases}$. *Dimostrare che* $PT_f = \delta_{x_0}$.

Esercizio 6.4. *Risolvere le seguenti equazioni impulsive:*

a) $T'' + T = \delta_1$	*b)* $T'' - T' = \delta$	*c)* $T'' - 2T' + 2T = \delta$
d) $T'' + T' - 2T = \delta$	*e)* $T' - T = \delta + \delta_1$	*f)* $T'' + T = \delta + \delta_2$
g) $T'' - T' = \delta'$	*h)* $T'' + T' = \delta'$	*i)* $T'' + 9T' = \delta'$

Esercizio 6.5. *Sia* $(T_k)_k \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ *tale che* $T_k \xrightarrow{k\to+\infty} T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *e* α *un multiindice. Dimostrare che* $\partial^\alpha T_k \xrightarrow{k\to+\infty} \partial^\alpha T$.

Esercizio 6.6. *Siano* $S, T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *e* $\alpha \in \mathbb{C}$. *Dimostrare che*

$$(S+T)(\phi) := S(\phi) + T(\phi), \qquad (\alpha T)(\phi) := \alpha T(\phi), \qquad \phi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

definiscono distribuzioni $S + T$ *e* αT *in* $\mathscr{D}'(\Omega)$. *Ovvero,* $\mathscr{D}'(\Omega)$ *è uno spazio vettoriale.*

Esercizio 6.7. *Sia* γ *una curva regolare in* $\mathbb{R}^n$. *Supponiamo che* γ *abbia una parametrizzazione* r *tale che* $r^{-1}(K)$ *è compatto per ogni* $K \subset\subset \mathbb{R}^n$. *Dimostrare che*

$$\delta_\gamma(\phi) := \int_\gamma \phi(x)\,ds, \qquad \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n),$$

definisce una distribuzione $\delta_\gamma \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Esercizio 6.8. *Sia* $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1 > 0, \\ 0 & \text{se } x_1 < 0. \end{cases}$$

Determinare $\partial_1 T_u$ *e* $\partial_2 T_u$.

Esercizio 6.9. *Trovare una mappa lineare* $T \mapsto \overline{T} : \mathscr{D}'(\mathbb{R}) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ *tale che* $\overline{T_f} = T_{\overline{f}}$ *per ogni distribuzione regolare* T_f *(qui* $\overline{f}$ *è il complesso coniugato della funzione* f*).*

Esercizio 6.10. *Sia* $g(x) = e^x$ *e* $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. *Trovare un'applicazione lineare*

$$T \mapsto T \circ g : \mathscr{D}'(\mathbb{R}_+) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R})$$

tale che $T_f \circ g = T_{f\circ g}$ *per ogni distribuzione regolare* $T_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$.

Suggerimento: *Scrivere* $T_{f\circ g}(\phi)$ *nella forma* $T_f(A(\phi))$ *con un'operatore opportuno* A.

7 La trasformata di Fourier

Di cosa si tratta? La trasformata di Fourier è una trasformata integrale che trova numerose applicazioni nella fisica, nell'ingegneria e nella matematica. In particolare, è di importanza fondamentale nell'analisi di equazione a derivate parziali e nella teoria dei segnali. Discutiamo la trasformata di Fourier nell'ambito delle funzioni di classe L^1 e L^2.

La trasformata di Fourier $\widehat{f}$ di $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ è la funzione $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definita da

$$\boxed{\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\, dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,} \tag{7.1}$$

dove $x\xi := x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$. Osserviamo che $|e^{-ix\xi}| = 1$, quindi la funzione integranda appartiene a $L^1(\mathbb{R}^n)$ per ogni ξ.

7.1 La trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^n)$

7.1 Lemma. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora:*

i) $\widehat{f} \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e* $\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant (2\pi)^{-n/2}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

In particolare: $f \mapsto \widehat{f} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ è lineare e limitato.

ii) $\widehat{f}(\xi) \xrightarrow{|\xi|\to\infty} 0$ *(Lemma di Riemann-Lebesgue)*

DIMOSTRAZIONE. i) Basta osservare che

$$|e^{-ix\xi} f(x)| \leqslant |f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n_x) \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

La continuità segue dal teorema della convergenza dominata.

ii) Impiegheremo il Lemma seguente.

Lemma. $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow (1 + |\xi|^N)\widehat{g}(\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ per ogni $N \in \mathbb{N}$.
In particolare: $\widehat{g} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni $p \in [1, +\infty]$.

DIMOSTRAZIONE. Sia prima $n = 1$. Integrazione per parti $\Rightarrow$

$$|\xi^N \widehat{g}(\xi)| \leqslant \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{d^N}{dx^N} e^{ix\xi}\Big) g(x)\, dx \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} g^{(N)}(x)\, dx \right| \leqslant \|g^{(N)}\|_{L^1}$$

$\Rightarrow (1 + |\xi|^N)|\widehat{g}(\xi)| \leqslant C_N := \|g\|_{L^1} + \|g^{(N)}\|_{L^1}$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}(\xi)|^p \, d\xi \leqslant C_N^p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+|\xi|^{pN}} \, d\xi < +\infty \text{ se } N > 1/p.$$

Nel caso $n > 1$ si procede similmente, utilizzando[9]

$$|\xi|^{2N} = (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^N = \sum_{|\alpha|=2N} a_{\alpha N} \xi^\alpha$$

con opportune costanti $a_{\alpha N}$ e

$$|\xi^\alpha \widehat{g}(\xi)| \leqslant \|\partial^\alpha g\|_{L^1}.$$

Inoltre, $(1+|\xi|^{2pN})^{-1} \in L^1(\mathbb{R}^n_\xi)$ se $N > n/2p$. ■

Sia dato $\varepsilon > 0$.

Dai risultati della prima parte (Capitolo 2) $\Rightarrow \exists\, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \quad \|f-g\|_{L^1} < \varepsilon/2$

i) $\Rightarrow |\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| < \varepsilon/2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$

Lemma $\Rightarrow \exists\, R > 0 \quad \forall\, |\xi| > R : \quad |\widehat{g}(\xi)| \leqslant \frac{C_1}{1+|\xi|} < \varepsilon/2$

$\Rightarrow |\widehat{f}(\xi)| \leqslant |\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| + |\widehat{g}(\xi)| < \varepsilon \quad \forall\, |\xi| \geqslant R.$ ■

7.2 Lemma. *Sia $f(x) = e^{-|x|^2/2}$. Allora $\widehat{f} = f$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il caso $n = 1$. f è soluzione del problema di Cauchy

$$y'(x) = -xy(x), \qquad y(0) = 1.$$

Anche $\widehat{f}$ è una soluzione:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}'(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\xi} e^{-ix\xi} f(x) \, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}(-ix) f(x) \, dx = i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f'(x) \, dx \\
&= -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d}{dx} e^{-ix\xi} \right) f(x) \, dx = i^2 \xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x) \, dx = -\xi \widehat{f}(\xi), \\
\widehat{f}(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = 1.
\end{aligned}$$

Unicità della soluzione $\Rightarrow f = \widehat{f}$.

Il caso $n > 1$ segue facilmente (cfr. Esercizio 7.3). ■

---

[9] Più precisamente, si può dimostrare, procedendo per induzione su $N \in \mathbb{N}_0$,

$$(x_1 + \cdots + x_n)^N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} x^\alpha, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

dove si definisce $\alpha! = (\alpha_1!) \cdots (\alpha_n!)$ e $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, con $x_j^{\alpha_j} \equiv 1$ se $\alpha_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$.

7.3 Teorema (Formula di inversione)**.** *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tale che $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora*

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi)\, d\xi \quad \textit{quasi ovunque in } \mathbb{R}^n.$$

Dimostrazione. Il secondo membro della formula definisce la funzione $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Siano $g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Esercizio 7.5.b) e 7.4.b) $\Rightarrow$ Per $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)\widehat{h}(\xi)e^{ix\xi}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (e^{ix\cdot}g)\widehat{\ }(\xi)h(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(\xi - x)h(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(-y)h(x-y)\, dy. \quad (*)$$

Poniamo adesso $G(x) := (2\pi)^{-n/2}e^{-|x|^2/2}$ e $G_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$.

$\Rightarrow \|G_\varepsilon\|_{L^1} = 1$, $\|G(\varepsilon\cdot)\|_{L^\infty} = G(0) = (2\pi)^{-n/2}$ e

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(\xi) &= G_\varepsilon(-\xi) = \varepsilon^{-n}G(-\xi/\varepsilon) \overset{7.2}{=} \varepsilon^{-n}\widehat{G}(-\xi/\varepsilon) \\ &= \varepsilon^{-n}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi/\varepsilon}G(x)\, dx \overset{y=x/\varepsilon}{=} (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\xi}G(\varepsilon y)\, dy = \widehat{G(\varepsilon\cdot)}(-\xi). \end{aligned}$$

Quindi

$$(G_\varepsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G_\varepsilon(\xi)f(x-\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{G(\varepsilon\cdot)}(-\xi)f(x-\xi)\, d\xi \overset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} G(\varepsilon\xi)\widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\, d\xi.$$

Seguono:

(1) $(G_\varepsilon * f)(x) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} u(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ $\qquad$ ($G(0) = (2\pi)^{-n/2}$ e convergenza dominata),

(2) $G_\varepsilon * f \xrightarrow{\varepsilon\to 0} f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

La (2) sarebbe un risultato della prima parte del corso (Teorema 2 in Capitolo 2) se G_ε fosse un mollificatore. G_ε ha tutte le proprietà di un mollificatore, salvo il fatto che $\operatorname{supp} G_\varepsilon$ non è contenuto nella palla di raggio ε centrato nell'origine. Comunque, utlizzando il forte decadimento di $x \mapsto \exp(-|x|^2/2)$, si può dimostrare che la (2) vale lo stesso (riportiamo la dimostrazione in seguito, ma la escludiamo dallo programma d'esame).

(2) $\Rightarrow \exists\, \varepsilon_k \to 0: \quad G_{\varepsilon_k} * f \xrightarrow{k\to+\infty} f$ puntualmente quasi ovunque in $\mathbb{R}^n$.

(1) $\Rightarrow f = u$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^n$. ∎

Lemma Vale la (2) nelle dimostrazione del Teorema 7.3.

Dimostrazione. Lemma 6.4 $\Rightarrow \exists\, \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n): \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 1,\ \phi(x) = 1 \quad \forall\, |x| \leqslant 1$.

$\rho_k(x) := \phi(x/k)G(x)$, $\rho_{k,\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-n}\rho_k(x/\varepsilon)$

$\Rightarrow \rho_k \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant \rho_k \leqslant G$, $\|\rho_k - G\|_{L^1} \xrightarrow{k\to+\infty} 0$,

$c_k := \|\rho_k\|_{L^1} = \|\rho_{k,\varepsilon}\|_{L^1} \leqslant 1$, $c_k \xrightarrow{k\to+\infty} 1$,

per ogni k, $\{\rho_{k,\varepsilon}/c_k\}_{\varepsilon>0}$ è una famiglia di mollificatori
(dai risultati della prima parte (Capitolo 2)).

Siano $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\delta > 0$ arbitrario.

$\|G_\varepsilon * f - f\|_{L^1} \leqslant \|(G_\varepsilon - \rho_{k,\varepsilon}) * f\|_{L^1} + \|\rho_{k,\varepsilon} * f - c_k f\|_{L^1} + \|c_k f - f\|_{L^1}$.

$\|(G_\varepsilon - \rho_{k,\varepsilon}) * f\|_{L^1} \leqslant \|G_\varepsilon - \rho_{k,\varepsilon}\|_{L^1}\|f\|_{L^1} = \|G - \rho_k\|_{L^1}\|f\|_{L^1} \xrightarrow{k\to+\infty} 0,$

$\|c_k f - f\|_{L^1} = (1 - c_k)\|f\|_{L^1} \xrightarrow{k\to+\infty} 0$

$\Rightarrow \exists\ N = N(\delta) \quad \forall\ \varepsilon > 0 : \quad \|(G_\varepsilon - \rho_{N,\varepsilon}) * f\|_{L^1} + \|c_N f - f\|_{L^1} < \delta/2.$

Dai risultati della prima parte del corso (Capitolo 2):

$\|\rho_{N,\varepsilon} * f - c_N f\|_{L^1} = c_N\|\frac{1}{c_N}\rho_{N,\varepsilon} * f - f\|_{L^1} \xrightarrow{\varepsilon\to0^+} 0.$

Concludiamo quindi: $\exists\ \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta) > 0 \quad \forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) : \quad \|\rho_{N,\varepsilon} * f - c_N f\|_{L^1} < \delta/2.$

$\Rightarrow \forall\ \delta > 0 \quad \exists\ \varepsilon_0 > 0 \quad \forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) : \quad \|G_\varepsilon * f - f\|_{L^1} < \delta.$ ∎

7.4 Corollario. *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\widehat{f} = \widehat{g}$. Allora $f = g$ quasi ovunque.*

Dimostrazione. $h := f - g \Rightarrow h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\widehat{h} = \widehat{f} - \widehat{g} = 0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 7.3 $\Rightarrow h = 0$ quasi ovunque. ∎

La trasformata di Fourier inversa di $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ è la funzione $\check{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ con

$$\boxed{\check{f}(x) := (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(\xi)\, d\xi = \widehat{f}(-x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.} \tag{7.2}$$

Il Teorema 7.3 implica che

$$f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \check{\widehat{f}} = (\widehat{f}\,)\check{} = f \text{ quasi ovunque.}$$

Analogamente

$$f, \check{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \widehat{\check{f}} = (\check{f}\,)\widehat{} = f \text{ quasi ovunque.}$$

In particolare (cfr. il Lemma nella dimostrazione 7.1),

$$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \check{\widehat{f}} = f = \widehat{\check{f}} \quad \text{su } \mathbb{R}^n. \tag{7.3}$$

7.2 La trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^n)$

7.5 Lemma (Parseval-Plancherel formula)**.** *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Allora $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$, e $(\widehat{f}, \widehat{g})_{L^2} = (f, g)_{L^2}$.*

Dimostrazione. **Passo I.** Siano $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Esercizio 7.5.b) e $\overline{\widehat{g}} = \overline{g}^{\vee}$ $\Rightarrow$

$$(\widehat{f}, \widehat{g})_{L^2} = \int \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\, d\xi = \int f(\xi)(\check{\overline{g}})\widehat{\ }(\xi)\, d\xi \overset{(7.3)}{=} \int f(\xi)\overline{g(\xi)}\, d\xi = (f, g)_{L^2}.$$

Passo II. Sia $\chi_k := \chi_{\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| \leqslant k\}}$ (funzione caratteristica).

$$\Rightarrow \begin{cases} \chi_k f \xrightarrow{k\to+\infty} f \text{ in } L^1 \text{ e } L^2, \\ (\chi_k f) * \rho_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ e } (\chi_k f) * \rho_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \chi_k f \text{ in } L^1 \text{ e } L^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists\, (f_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \quad f_k \xrightarrow{k\to+\infty} f$ in L^1 e L^2

Passo I $\Rightarrow \|\widehat{f}_k - \widehat{f}_\ell\|_{L^2} = \|f_k - f_\ell\|_{L^2}$

$\Rightarrow (\widehat{f}_k)$ successione di Cauchy in L^2

$\Rightarrow \exists\, F \in L^2 : \quad \widehat{f}_k \xrightarrow{k\to+\infty} F$ in L^2.
(nota: una sottosuccessione di $(\widehat{f}_k)$ converge a F puntualmente quasi ovunque)

Lemma 7.1 $\Rightarrow \|\widehat{f}_k - \widehat{f}\|_{L^\infty} \leqslant \|f_k - f\|_{L^1} \xrightarrow{k\to+\infty} 0$
(cioè $\widehat{f}_k$ converge a $\widehat{f}$ uniformemente in $\mathbb{R}^n$, quindi anche puntualmente)

$\Rightarrow \widehat{f} = F \in L^2$ e $\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|F\|_{L^2} \xleftarrow{k\to+\infty} \|\widehat{f}_k\|_{L^2} \overset{\text{Passo I}}{=} \|f_k\|_{L^2} \xrightarrow{k\to+\infty} \|f\|_{L^2}$

Passo III. Sia (f_k) come prima e $(g_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $g_k \xrightarrow{k\to+\infty} g$ in L^1 e L^2.

$\Rightarrow (\widehat{f}, \widehat{g})_{L^2} \xleftarrow{k\to+\infty} (\widehat{f}_k, \widehat{g}_k)_{L^2} \overset{\text{Passo I}}{=} (f_k, g_k)_{L^2} \xrightarrow{k\to+\infty} (f, g)_{L^2}$. ■

7.6 Teorema (di Plancherel). *Esiste un'unica $\mathscr{F} \in \mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ con le seguente proprietà:*

a) *$\mathscr{F}$ è invertibile, $\mathscr{F} = \widehat{\cdot}$ (cioè, coincide con la trasformata di Fourier (7.1)) e $\mathscr{F}^{-1} = \check{\cdot}$ (cioè, coincide con la trasformata di Fourier inversa (7.2)) in $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.*

b) *$\mathscr{F}$ è un operatore unitario, cioè*

$$(\mathscr{F} f, \mathscr{F} g)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (f, g)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\, f, g \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Dimostrazione. $f \in L^2 \Rightarrow \exists\, (f_k) \subset L^1 \cap L^2 : \quad f_k \xrightarrow{k\to+\infty} f$ in L^2
(per esempio, $f_k = f\chi_k$ con χ_k la funzione caratteristica di $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leqslant k\}$).

Esistenza. Sia $f \in L^2$ e (f_k) come detto.

Lemma 7.5 $\Rightarrow (\widehat{f}_k)$ successione di Cauchy in L^2.

Definiamo $\mathscr{F} f := \lim_{k\to+\infty} \widehat{f}_k$ in L^2.

$\mathscr{F}$ è ben definita. Sia $(h_k) \subset L^1 \cap L^2$ una qualsiasi altra successione tale che $h_k \xrightarrow{k\to+\infty} f$ in L^2, analoga a (f_k). Troviamo

$$\|\mathscr{F} f - \widehat{h}_k\|_{L^2} \leqslant \|\mathscr{F} f - \widehat{f}_k\|_{L^2} + \|\widehat{f}_k - \widehat{h}_k\|_{L^2} \overset{\text{Lemma 7.5}}{=} \|\mathscr{F} f - \widehat{f}_k\|_{L^2} + \|f_k - h_k\|_{L^2} \xrightarrow{k\to+\infty} 0.$$

Nota bene: per $f \in L^1 \cap L^2$ si può scegliere $f_k := f \Rightarrow \mathscr{F} f = \widehat{f}$.

Continuità e iniettività. $\|\mathscr{F} f\|_{L^2} \xleftarrow{k\to+\infty} \|\widehat{f}_k\|_{L^2} \overset{\text{Lemma 7.5}}{=} \|f_k\|_{L^2} \xrightarrow{k\to+\infty} \|f\|_{L^2}$

$\Rightarrow \|\mathscr{F} f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} \Rightarrow \mathscr{F}$ iniettiva e $\|\mathscr{F}\|_{\mathscr{L}(L^2)} = 1$.

Suriettività. Siano $g \in L^2$ e $(g_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $g_k \xrightarrow{k\to+\infty} g$ in L^2.

Lemma nella dimostrazione del Lemma 7.1 e (7.3) $\Rightarrow$

$$f_k := \check{g}_k = \widehat{g}_k(-\,\cdot) \in L^1 \cap L^2 \text{ e } \widehat{f}_k = g_k \xrightarrow{k\to+\infty} g \text{ in } L^2$$

Lemma 7.5 $\Rightarrow \|f_k - f_\ell\|_{L^2} = \|\widehat{f}_k - \widehat{f}_\ell\|_{L^2} = \|g_k - g_\ell\|_{L^2}$

$\Rightarrow (f_k)$ successione di Cauchy in $L^2 \Rightarrow \exists\, f \in L^2 : \quad f_k \xrightarrow{k\to+\infty} f$ in L^2

$\Rightarrow \mathscr{F} f = \lim_{k\to+\infty} \widehat{f}_k = \lim_{k\to+\infty} g_k = g$

Inversa. Teorema 0.1 $\Rightarrow \mathscr{F}^{-1} \in \mathscr{L}(L^2)$.

Siano $g \in L^1 \cap L^2$ e $(g_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $g_k \xrightarrow{k\to+\infty} g$ in L^2.

$g_k = \widehat{\check{g}}_k$ e $\check{g}_k \in L^1 \cap L^2 \Rightarrow \mathscr{F}\check{g}_k = \widehat{\check{g}}_k = g_k$

$\Rightarrow \mathscr{F}^{-1} g_k = \check{g}_k = \widehat{h}_k$ dove $h_k := g_k(-\,\cdot) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$h_k \xrightarrow{k\to+\infty} h$ in L^2 dove $h = g(-\,\cdot) \in L^1 \cap L^2 \Rightarrow$

$$\mathscr{F}^{-1} g \xleftarrow{k\to+\infty} \mathscr{F}^{-1} g_k = \widehat{h}_k = \mathscr{F} h_k \xrightarrow{k\to+\infty} \mathscr{F} h = \widehat{h} = (g(-\,\cdot))\widehat{\ } = \check{g}.$$

Formula. Siano $(f_k), (g_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $f_k \to f$ e $g_k \to g$ in L^2.

$(\mathscr{F} f, \mathscr{F} g) \xleftarrow{k\to+\infty} (\mathscr{F} f_k, \mathscr{F} g_k) = (\widehat{f}_k, \widehat{g}_k) \overset{\text{Lemma 7.5}}{=} (f_k, g_k) \xrightarrow{k\to+\infty} (f, g)$. ■

La scelta di $f_k = \chi_k f$ nella dimostrazione dell'esistenza di $\mathscr{F} f$ implica il seguente:

7.7 Corollario. *Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ allora $\mathscr{F} f = \lim_{k\to+\infty} f_k$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$, dove*

$$f_k(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{|x|\leqslant k} e^{-ix\xi} f(x)\, dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Nota. È di uso comune l'abuso di notazione $\widehat{f}$ per la trasformata di Fourier, indipendentemente dal contesto funzionale (o distribuzionale) adottato, tenendo presenti, ovviamente, i diversi significati di tale simbolo nella definizione data dalla (7.1) per $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e dall'estensione fornita dal Teorema 7.6 per $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (cfr. anche la Sezione 8.2.3).

7.3 Esercizi

Esercizio 7.1. *a) Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ con $f(x) = \sqrt{2\pi} e^{-|x|}$. Verificare che $\widehat{f}(\xi) = \dfrac{2}{1+\xi^2}$.*

b) Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ con $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} & : |x| \leqslant 1 \\ 0 & : \text{altrimenti} \end{cases}$. Verificare che $\widehat{f}(\xi) = 2\dfrac{\sin\xi}{\xi}$.

Esercizio 7.2. *Dimostrare che, se* $c < (2\pi)^{-1/2}$, *la stima* $\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant c\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ *è falsa, fornendo un controesempio. Dunque,* $\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant (2\pi)^{-1/2}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ *è ottimale.*

Esercizio 7.3. *Sia* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *con* $f(x) = e^{-|x|^2/2}$. *Dimostrare che* $\widehat{f}(\xi) = e^{-|\xi|^2/2}$.

Suggerimento: *Usare* $x\xi = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$ *e* $f(x) = G(x_1) \cdot \ldots \cdot G(x_n)$ *con* $G(t) = e^{-t^2/2}$.

Esercizio 7.4. *Siano* $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$, A *una matrice* $n \times n$ *reale invertibile e* ${}^tA$ *la sua trasposta. Dimostrare:*

a) *Se* $v(x) = u(x - y) = (\tau_y u)(x)$ *allora* $\widehat{v}(\xi) = e^{-iy\cdot\xi}\widehat{u}(\xi)$.

b) *Se* $v(x) = e^{ix\cdot y}u(x)$ *allora* $\widehat{v}(\xi) = \widehat{u}(\xi - y) = (\tau_y\widehat{u})(\xi)$.

c) *Se* $v(x) = u(A^{-1}x)$ *allora* $\widehat{v}(\xi) = |\det A|\widehat{u}({}^tA\xi)$.

d) *Se* $v(x) = \overline{u(x)}$ *allora* $\widehat{v}(\xi) = \overline{\widehat{u}(-\xi)}$.

Ricordando che u *è radiale se* $u(x) = \varphi(|x|)$ *con* φ *funzione definita su* $[0, +\infty)$, *o, equivalentemente,* $u(x) = u(Ax)$ *per ogni matrice ortogonale* A, *dimostrare che*

e) *Se* u *è radiale allora* $\widehat{u}$ *è radiale.*

Esercizio 7.5. *Siano* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Dimostrare:*

a) $\widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2}\widehat{f}\,\widehat{g}$. (**Suggerimento:** *Si ricordi che* $e^{-ix\xi} = e^{-i(x-y)\xi}e^{-iy\xi}$.)

b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)g(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\widehat{g}(\xi)\,d\xi$.

Esercizio 7.6. *Sia* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Dimostrare:*

$$\widehat{\partial_{x_j} f}(\xi) = i\xi_j\widehat{f}(\xi), \qquad \partial_{\xi_j}\widehat{f}(\xi) = -i\,\widehat{x_j f}(\xi).$$

Nota: *Iterando queste formule si trova quindi*

$$\widehat{\partial_x^\alpha f}(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha\widehat{f}(\xi), \qquad \partial_\xi^\alpha\widehat{f}(\xi) = (-i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha f}(\xi),$$

per ogni multi-indice α.

Esercizio 7.7. a) *Calcolare* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{(\xi^2+1)^2}$. b) *Calcolare* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\xi}{\xi^2}d\xi$.

Suggerimento: *Usare l'Esercizio* 7.1 *e il Teorema di Plancherel.*

Esercizio 7.8. *Calcolare la trasformata di Fourier della funzione*

$$u(x) = \begin{cases} |x|^\alpha, & \text{se } |x| < 1, \\ 0, & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

dove $\alpha > -3$, $x \in \mathbb{R}^3$, *così che* $u \in L^1(\mathbb{R}^3)$.

8 Complementi

8.1 Analisi in spazi metrici completi

8.1.1 Teoremi di punto fisso e applicazioni

Ricordiamo il seguente fondamentale risultato.

8.1 Teorema (del punto fisso di Banach-Caccioppoli)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico completo e $A\colon X \to X$ una contrazione stretta su X, ovvero*

$$\exists\ L \in [0, 1) \quad \forall\ x, y \in X: \quad d(Ax, Ay) \leqslant Ld(x, y).$$

Allora, A ammette un unico punto fisso $p \in X$, ovvero $\exists!\, p \in X$ tale che $Ap = p$. Inoltre, scelto $x_0 \in X$ arbitrario e posto $x_{n+1} = Ax_n = A^{n+1}x_0$, $n \in \mathbb{N}$, la successione $(x_n)_n$ è di Cauchy in X e si ha $x_n \to p$ per $n \to +\infty$.

La procedura descritta nel teorema si dice anche il metodo di soluzione per approssimazioni successive. Una prima, semplice applicazione riguarda una classe di equazioni integrali non lineari, associate a nuclei regolari.

8.2 Teorema. *Sia $k \in \mathscr{C}([a, b]^2 \times \mathbb{R})$ tale che, per ogni $z, z' \in \mathbb{R}$, $x, y \in [a, b]$,*

$$|k(x, y, z) - k(x, y, z')| \leqslant M|z - z'|,$$

per una costante $M \geqslant 0$, indipendente da x e y. Assumiamo $L = |\lambda|M(b - a) < 1$ e $\varphi \in \mathscr{C}([a, b])$. Allora, l'equazione (di Fredholm)

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x, y, f(y))\, dy + \varphi(x), \quad x \in [a, b],$$

ammette un'unica soluzione $f \in \mathscr{C}([a, b])$.

Dimostrazione. Definiamo, per $h \in \mathscr{C}([a, b])$,

$$(Ah)(x) = \lambda \int_a^b k(x, y, h(y))\, dy + \varphi(x), \quad x \in [a, b].$$

Le ipotesi implicano che $Ah \in X = \mathscr{C}([a, b])$ e che A è una contrazione stretta sullo spazio metrico completo (X, d) con $d(g, h) = \max\limits_{[a,b]} |g - h| = \|g - h\|_\infty$. Infatti, per $g, h \in \mathscr{C}([a, b])$,

$$\begin{aligned} d(Ag, Ah) = \max_{x \in [a,b]} |(Ag)(x) - (Ah)(x)| &\leqslant |\lambda| \int_a^b |k(x, y, g(y)) - k(x, y, h(y))|\, dy \\ &\leqslant |\lambda| \int_a^b M|g(y) - h(y)|\, dy \leqslant |\lambda|Md(g, h) \int_a^b dy = Ld(g, h). \end{aligned}$$

Il risultato segue quindi dal Teorema 8.1, e la soluzione è il limite (uniforme) delle f_n date da

$$f_0 \in \mathscr{C}([a,b]) \text{ arbitraria}, f_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b k(x,y,f_n(y))\,dy + \varphi(x), \quad x \in [a,b], n \in \mathbb{N}.$$

■

8.3 Commento. *Consideriamo l'equazione (integrale lineare) di Volterra*

$$f(x) = \lambda \int_a^x k(x,y) f(y)\,dy + \varphi(x), \quad x \in [a,b], \tag{8.1}$$

con k continua su $[a,b]\times[a,b]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Adattando la dimostrazione della Proposizione 8.2, considerando un nucleo $L(x,y) = \chi_\Omega(x,y)\,k(x,y)$, χ_Ω funzione caratteristica dell'insieme

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [a,b], y \in [a,x]\},$$

si potrebbe dimostrare l'esistenza di un'unica soluzione della (8.1) per $|\lambda|$ sufficientemente piccolo. Tuttavia, la (8.1) si può risolvere senza alcuna restrizione su $\lambda \in \mathbb{R}$, grazie al successivo Teorema 8.4.

8.4 Teorema. *Siano (X,d) uno spazio metrico completo e $A\colon X \to X$ tale che $B = A^\nu$ è una contrazione stretta su X per qualche $\nu \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Allora, A ammette un unico punto fisso $p \in X$.*

Dimostrazione. Se $q = Aq$ si ha anche $q = A^\nu q$, quindi q è l'unico punto fisso di B. Sia allora $p = Bp$, e scegliamo $x_0 = Ap$, $x_n = B^n x_0 \to p$ per $n \to +\infty$. Troviamo

$$p = \lim_{n\to+\infty} B^n x_0 = \lim_{n\to+\infty} B^n(Ap) = \lim_{n\to+\infty} A(B^n p) = \lim_{n\to+\infty} Ap = Ap,$$

cioè p è punto fisso di A. Inoltre, per ogni $x_0 \in X$, $A^n x_0 \to p = Ap$. Infatti,

$$A^{k\nu+j}x_0 = B^k(A^j x_0) \xrightarrow{k\to+\infty} p, \qquad j = 0, \dots, \nu-1,$$

per l'arbitrarietà del dato iniziale nel metodo delle approssimazioni successive. ■

8.5 Teorema. *Sia $k \in \mathscr{C}([a,b]^2)$ tale che $|k(x,y)| \leqslant M$, $(x,y) \in [a,b]^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathscr{C}([a,b])$. Allora, l'equazione (8.1) ammette un'unica soluzione in $\mathscr{C}([a,b])$.*

Dimostrazione. Definiamo, per $h \in \mathscr{C}([a,b])$,

$$(Ah)(x) = \lambda \int_a^x k(x,y)h(y)\,dy + \varphi(x), \quad x \in [a,b].$$

Si ha $A\colon X \to X$ con $X = \mathscr{C}([a,b])$. Inoltre, per $g, h \in \mathscr{C}([a,b])$, $x \in [a,b]$,

$$\begin{aligned}
|(Ag)(x) - (Ah)(x)| &\leqslant |\lambda| M d(g,h)(x-a) \leqslant [|\lambda| M(b-a)] d(g,h) \\
&\Rightarrow d(Ag, Ah) \leqslant [|\lambda| M(b-a)] d(g,h), \\
|(A^2 g)(x) - (A^2 h)(x)| &\leqslant (|\lambda| M)^2 d(g,h) \int_a^x (y-a)\, dy = (|\lambda| M)^2 d(g,h) \frac{(x-a)^2}{2} \\
&\Rightarrow d(A^2 g, A^2 h) \leqslant \frac{[|\lambda| M(b-a)]^2}{2} d(g,h), \\
&\dots \\
&\Rightarrow d(A^\nu g, A^\nu h) \leqslant \frac{[|\lambda| M(b-a)]^\nu}{\nu!} d(g,h), \nu \in \mathbb{N} \backslash \{0\}.
\end{aligned}$$

Dato che $\frac{K^\nu}{\nu!} \xrightarrow{\nu \to +\infty} 0$ per ogni $K \in \mathbb{R}$, si ha che A^ν è una contrazione stretta per ν sufficientemente grande, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Il risultato segue dunque dal Teorema 8.4. ■

Un'ulteriore, classica applicazione del Teorema 8.4 è la dimostrazione dell'esistenza e unicità della soluzione locale del Problema di Cauchy per un sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine in forma normale, nelle usuali ipotesi di Lipschitzianità, illustrata nella successiva Proposizione 8.6.

8.6 Teorema. *Si consideri il Problema di Cauchy per un sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine in forma normale,*

$$\begin{cases} y_j'(x) = f_j(x, y_1(x), \dots, y_N(x)), \quad j = 1, \dots, N \\ y_j(x_0) = y_{j0}, \quad j = 1, \dots, N, \end{cases} \tag{8.2}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{8.3}$$

con $y \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R}^N)$, $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, e $f \in \mathscr{C}(K, \mathbb{R}^N)$, $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ compatto, $(x_0, y_0) \in K^\circ$. Inoltre, f è Lipschitziana in y, uniformemente rispetto a x, ovvero

$$|f(x,y) - f(x,z)| \leqslant L|y - z| \qquad \forall\ (x,y), (x,z) \in K,$$

dove $|.|$ è una norma su $\mathbb{R}^N$. Allora, esiste ed è unica la soluzione locale di (8.3), i.e., per un opportuno $\delta > 0$,

$$\exists! y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^N) \text{ che soddisfa } (8.3).$$

Dimostrazione. Sia M tale che $|f(x,y)| \leqslant M$ per ogni $(x,y) \in K$. Definiamo

$$X = \{(h \in \mathscr{C}([x_0 - \delta, x_0 + \delta], \mathbb{R}^N) \,:\, |h(x) - y_0| \leqslant M|x - x_0|, x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\},$$

dove $\delta > 0$ è scelto, come è possibile, in modo che

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \,:\, |y - y_0| \leqslant M|x - x_0|, x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\} \subset K.$$

Si vede facilmente che X è uno spazio metrico completo rispetto alla metrica usuale, indotta dalla norma $L^\infty(\bar{I})$. Definiamo, per $h \in X$,

$$(Ah)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))\, dt.$$

Allora, (8.3) è equivalente a $y = Ay$. Osserviamo che $A \colon X \to X$ ed è continua. Inoltre,

$$|(Ag)(x) - (Ah)(x)| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} [f(t, g(t)) - f(t, h(t))]\, dt \right| \leqslant L|x - x_0| d(g, h).$$

Procedendo come nella dimostrazione della Proposizione 8.5, si trova che A^ν è una contrazione stretta per un esponente ν sufficientemente grande. Per il Teorema 8.4, A ammette quindi un unico punto fisso $y \in X$, che è il limite uniforme della successione

$$\begin{cases} y_{n+1}(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt, & n \in \mathbb{N}, \\ y_0 \in X \text{ arbitraria (p.es., } y_0(x) = y_0). \end{cases}$$

■

Concludiamo questa sezione con una variante del Teorema del punto di fisso di Banach-Caccioppoli, in cui è presente un parametro, da cui il problema di punto fisso dipende con contionuità. La sua applicazione ai problemi trattati nelle Proposizioni 8.2, 8.5 e 8.6 permette di dimostrare che le soluzioni dipendono con continuità dai dati, ovvero, φ e, rispettivamente, (x_0, y_0). I dettagli sono lasciati come esercizio.

8.7 Teorema. *Sia (X, d) uno spazio metrico completo, Y uno spazio topologico, $f \colon X \times Y \to X$ tale che:*

i) $y \mapsto f(x, y)$ *è una funzione continua da Y a X per ogni $x \in X$;*

ii) $\exists\, L \in [0, 1) \quad \forall\, y \in Y \quad \forall\, x_1, x_2 \in X : \quad d(f(x_1, y), f(x_2, y)) \leqslant L d(x_1, x_2).$

Allora, se $x_y = f(x_y, y)$, $y \in Y$, la mappa $y \mapsto x_y$ è continua da Y a X.

Dimostrazione. Per le ipotesi e il Teorema 8.1, la mappa $y \mapsto x_y$ è ben definita.

Fissato $y_0 \in Y$, si ha

$$\begin{aligned} d(x_y, x_{y_0}) = d(f(x_y, y), f(x_{y_0}, y_0)) &\leqslant d(f(x_y, y), f(x_{y_0}, y)) + d(f(x_{y_0}, y), f(x_{y_0}, y_0)) \\ &\leqslant L d(x_y, x_{y_0}) + d(f(x_{y_0}, y), f(x_{y_0}, y_0)). \end{aligned}$$

Otteniamo allora

$$(1 - L) d(x_y, x_{y_0}) \leqslant d(f(x_{y_0}, y), f(x_{y_0}, y_0)) \Rightarrow d(x_y, x_{y_0}) < \varepsilon,$$

se $y \in U_{y_0}$, intorno opportuno di y_0 in Y (dipendente da ε). ■

8.1.2 Differenziabilità di funzioni fra spazi normati

La seguente Definizione 8.8 estende la nozione di differenziabilità a funzioni fra spazi normati non necessariamente di dimensione finita.

8.8 Definizione. *Siano $f\colon \Omega \subseteq E \to F$, E, F spazi normati, Ω aperto di E, $x_0 \in \Omega$. Se per $h \in E$ tale che $x_0 + h \in \Omega$ si ha, con $A \in \mathcal{L}(E, F)$ e $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$,*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + \varphi(h)\|h\|, \tag{8.4}$$

si dice che f è differenziabile (secondo Fréchet) in x_0 e $A = f'(x_0)$ è la derivata di f in x_0, mentre $df_{x_0} = f'(x_0)\colon h \mapsto f'(x_0)h$ è il differenziale di f in x_0.

8.9 Commento. *i) Se esiste $f'(x_0)$, allora, per ogni $v \in E$,*

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{f(x_0 + \tau v) - f(x_0)}{\tau} = f'(x_0)v.$$

ii) Se, per ogni $v \in E$, esiste

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{f(x_0 + \tau v) - f(x_0)}{\tau} = Lv,$$

e si ha $L \in \mathcal{L}(E, F)$, allora L è detto differenziale di Gâteaux di f in x_0.

iii) Diversi risultati della teoria delle funzioni differenziabili fra spazi Euclidei si estendono alle funzioni differenziabili fra spazi normati generali. Per esempio, è una conseguenza immediata della (8.4) che se f è differenziabile in x_0 allora è continua in x_0. Inoltre, se $g\colon \Omega' \subseteq F \to G$, G normato, Ω' aperto in F, e g è differenziabile in $y_0 = f(x_0) \in \Omega'$, con f nelle ipotesi della Definizione 8.8, allora vale l'analogo della "regola di derivazione a catena", cioè, la funzione composta $g \circ f$ è differenziabile in x_0 e $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \circ f'(x_0)$. Il successivo risultato è l'analogo del Teorema di Fermat in questo ambito.

8.10 Teorema. *Sia $f\colon E \to \mathbb{R}$, E normato, $x_0 \in \Omega \subseteq E$, Ω aperto, punto di estremo locale per f. Assumiamo che f sia differenziabile in x_0. Allora, $df_{x_0} = f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Sia, per esempio, $r > 0$ tale che $x \in B_r(x_0)$ implica $f(x) < f(x_0)$. Il caso di un massimo in senso largo o di un minimo si trattano in modo analogo. Scelto $h \in E$ con $\|h\| = 1$, poniamo $\varphi(t) = f(x_0 + th)$, $t \in I = (-r, r)$. Le ipotesi implicano che $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $t = 0$ e, per il punto iii) del Commento 8.9, $d\varphi_0 = df_{x_0}(h)$. Inoltre, $0 \in I$ è un punto di massimo per φ interno all'intervallo I. Per il Teorema di Fermat, $d\varphi_0 = 0$. Dunque, $\forall h \in E \mid \|h\| = 1\colon df_{x_0}(h) = 0 \Rightarrow \|df_{x_0}\| = 0 \Leftrightarrow df_{x_0} = 0$. ∎

Il Teorema di Lagrange, vero per le funzioni reali di una variabile reale, non vale, in generale, per funzioni a valori vettoriali, neppure nel caso di dimensione finita. Infatti, sia, per esempio, $g\colon [0,1] \to \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto e^{2\pi i t} \Rightarrow g(0) = g(1)$. Non esiste $\theta \in (0,1)$ tale che $g'(\theta) = 2\pi i e^{2\pi i \theta} = 0$, dunque non esiste $\theta \in (0,1)$ tale che $0 = g(1) - g(0) = g'(\theta)(1-0)$. Il Teorema 8.11 è una sua versione più debole.

8.11 Teorema (degli incrementi finiti)**.** *Sia $f\colon \Omega \subseteq E \to F$ continua, E, F normati, Ω aperto di E, $x_0 \in \Omega$, $h \in E$ tale che $x_0 + h \in \Omega$. Denotiamo*

$$
\begin{aligned}
[x_0, x_0 + h] &= \{x = x_0 + th \colon t \in [0,1]\},\\
]x_0, x_0 + h[&= \{x = x_0 + th \colon t \in (0,1)\},
\end{aligned}
$$

e assumiamo $[x_0, x_0+h] \subset \Omega$. Inoltre, assumiamo che $f'(x)$ esista per ogni $x \in]x_0, x_0+h[$, ed esista $M > 0$ tale che $\forall x \in]x_0, x_0+h[\ \ \|f'(x)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leqslant M$. Allora,

$$\|f(x_0+h) - f(x_0)\| \leqslant M\|h\|.$$

Dimostrazione. Poniamo, come sopra, $\varphi(t) = f(x_0 + th)$, $t \in [0,1]$. Allora, $\varphi \in \mathscr{C}([0,1], F)$, $\varphi'(t) = f'(x_0+th)h$ e $\|\varphi'(t)\| \leqslant M\|h\| =: a$, $t \in (0,1)$. Sia

$$A_\varepsilon = \{t \in [0,1] \colon \|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leqslant (a+\varepsilon)t + \varepsilon\}.$$

Per continuità di φ, A_ε è chiuso, e, posto $\mu = \sup A_\varepsilon$, si ha $\mu > 0$. Sia, per assurdo, $\mu < 1$. Allora, per definizione di differenziale, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\frac{\|\varphi(\mu+\delta) - \varphi(\mu) - \varphi'(\mu)\delta\|}{\delta} < \varepsilon \Rightarrow \|\varphi(\mu+\delta) - \varphi(\mu)\| \leqslant \|\varphi'(\mu)\|\delta + \varepsilon\delta \leqslant (a+\varepsilon)\delta.$$

Siccome $\mu \in A_\varepsilon$ ($\Leftarrow A_\varepsilon$ è chiuso),

$$\|\varphi(\mu) - \varphi(0)\| \leqslant (a+\varepsilon)\mu + \varepsilon$$

da cui segue

$$\|\varphi(\mu+\delta) - \varphi(0)\| \leqslant (a+\varepsilon)(\mu+\delta) + \varepsilon. \tag{8.5}$$

La (8.5) contraddice $\mu = \sup A_\varepsilon$, dato che implica $\mu + \delta \in A_\varepsilon$. Si deve pertanto avere $\mu = 1$, e quindi

$$\forall \varepsilon > 0\ \|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leqslant a + 2\varepsilon,$$

cioè,

$$\|f(x_0+h) - f(x_0)\| \leqslant M\|h\|.$$

∎

8.12 Esempio. *Siano F uno spazio vettoriale normato su $\mathbb{R}$ e*

$$L\colon (t,y,z) \in [t_0,t_1] \times \mathcal{A} \mapsto L(t,y,z) \in \mathbb{R},$$

$\mathcal{A}$ aperto di $F \times F$. Assumiamo L continua e derivabile rispetto a (y,z) con derivata L' continua (cioè, $\partial_y L$ e $\partial_z L$ sono continue). $\mathscr{C}^1([a,b], F)$ è lo spazio di Banach delle funzioni f continue da

$I = [a, b]$ a valori in F con derivata f' continua[10]*, e norma $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \max_I \|f\|_F + \max_I \|f'\|_F$. Allora,*

$$\Omega = \{f \in \mathscr{C}^1([t_0, t_1], F) : \forall t \in [t_0, t_1]\ (f(t), f'(t)) \in \mathcal{A}\}$$

è un aperto di $\mathscr{C}^1([t_0, t_1], F)$. Consideriamo il funzionale $\mathcal{I} \colon \Omega \to \mathbb{R}$ definito da

$$\mathcal{I}(f) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, f(t), f'(t))\, dt$$

(funzionale di azione). Si vede facilmente che $\mathcal{I} \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ e $\mathcal{I}'(f_0) \in \mathcal{L}(\mathscr{C}^1([t_0, t_1], F); \mathbb{R})$ è dato da

$$\mathcal{I}'(f_0)g = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial y}(t, f_0(t), f_0'(t)) + \frac{\partial L}{\partial z}(t, f_0(t), f_0'(t)) \right] g(t)\, dt.$$

Se f_0 e L sono di classe $\mathscr{C}^2$ sui rispettivi domini di definizione, allora

$$\mathcal{I}'(f_0)g = \left[\frac{\partial L}{\partial z}(t, f_0(t), f_0'(t))\, g(t) \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial y}(t, f_0(t), f_0'(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial z}(t, f_0(t), f_0'(t)) \right] g(t)\, dt.$$

Se nella definizione di Ω si richiede anche $f(t_0) = f(t_1)$, allora f_0 è un punto di stazionarietà di $\mathcal{I}$ se soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial z}(t, f_0(t), f_0'(t)) - \frac{\partial L}{\partial y}(t, f_0(t), f_0'(t)) = 0.$$

Concludiamo questa sezione con il Teorema delle funzioni implicite nell'ambito degli spazi normati completi. La dimostrazione, che non riportiamo in dettaglio[11], si può ottenere tramite i Teoremi 8.7 e 8.11. Con la notazione $D_x f(x, y)$ indichiamo qui il differenziale parziale della funzione f rispetto alla variabile x.

8.13 Teorema (delle funzioni implicite)**.** *Siano $f \colon \Omega \subseteq E \times F \to G$, Ω aperto, E spazio topologico, F, G spazi di Banach*[a]*, $f \in \mathscr{C}(\Omega, G)$. Assumiamo:*

i) $(a, b) \in \Omega$ *e* $f(a, b) = c \in G$;

ii) $D_y f \colon \Omega \to \mathcal{L}(F, G)$ *è continua;*

iii) $Q = (D_y f)(a, b) \in \mathcal{GL}(F, G)$[b].

Allora, esistono $A \subseteq F$, $B \subseteq G$ aperti, tali che $a \in A$, $b \in B$, e

$$\forall x \in A\ \exists! y \in B\ f(x, y) = c. \tag{8.6}$$

Definita $\varphi \colon A \to B \colon x \mapsto y = \varphi(x)$, con $(x, y) \in A \times B$ che soddisfa (8.6), cioè vale $f(x, \varphi(x)) = c$ per ogni $x \in A$, si ha $\varphi \in \mathscr{C}(A, B)$. Inoltre, se assumiamo anche che

[10] Più precisamente, si dovrebbe dire $f'(t) \cdot 1$, essendo $f'(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F) \sim F$.

[11] L'argomentazione è analoga a quella seguita in J.P. Cecconi, G. Stampacchia, Analisi Matematica, 2° Volume, Funzioni di più variabili, Liguori (1983), Cap. IV, n. 27.2.

iv) $D_x f : \Omega \to \mathcal{L}(E, G)$ *è continua,*

allora si ha $\varphi \in \mathscr{C}^1(A, B)$ *e* $d\varphi_x = -[(D_y f)^{-1} \circ (D_x f)](x, \varphi(x))$.

[a] È sufficiente G spazio normato.
[b] Cioè, esiste Q^{-1}. Se G non è completo, va richiesto $Q^{-1} \in \mathcal{L}(G, F)$.

8.1.3 Soluzione di alcuni problemi di evoluzione

1. Sia E uno spazio di Banach e $A \in \mathcal{L}(E)$. Definiamo, per $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{tA} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(tA)^n}{n!} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(tA)^n}{n!}. \tag{8.7}$$

Dato che, posto $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{(tA)^n}{n!}$, per ogni $\varepsilon > 0$ e $M \geqslant 0$,

$$\|S_{N+M} - S_N\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \sum_{n=N}^{N+M} \frac{(|t| \cdot \|A\|_{\mathcal{L}(E)})^n}{n!} < \varepsilon,$$

per N sufficientemente grande, la serie (8.7) converge assolutamente, e si ha $e^{tA} \in \mathcal{L}(E)$ con $\|e^{tA}\| \leqslant e^{|t| \cdot \|A\|}$. Grazie alla convergenza assoluta, troviamo, per $t, s \in \mathbb{R}$, $e^{(s+t)A} = e^{sA} e^{tA}$. Infatti, ricordando le proprietà del prodotto di serie assolutamente convergenti,

$$e^{sA} e^{tA} = \sum_{n \geqslant 0} \sum_{m \geqslant 0} \frac{(sA)^n}{n!} \frac{(tA)^m}{m!} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{A^n}{n!} \sum_{j+k=n} \frac{n!}{j!\, k!} s^j\, t^k = \sum_{n \geqslant 0} \frac{[(s+t)A]^n}{n!} = e^{(s+t)A}.$$

Pertanto, $(e^{tA})_{t \in \mathbb{R}}$ è un gruppo di operatori invertibili di $\mathcal{L}(E)$, con

$$\lim_{t \to 0} e^{tA} = e^{0A} = I \text{ e } (e^{tA})^{-1} = e^{-tA}.$$

È immediato anche mostrare che $Ae^{tA} = e^{tA}A$. Innanzitutto, osserviamo che la Definizione 8.8 di derivata rispetto a t è equivalente alla definizione usuale ($t \in \mathbb{R} = E$), e si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{tA} = & \lim_{h \to 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = e^{tA} \lim_{h \to 0} \frac{e^{hA} - I}{h} \\ & = e^{tA} \lim_{h \to 0} \left(A + h \sum_{n \geqslant 2} \frac{h^{n-2} A^n}{n!} \right) = Ae^{tA}. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Infatti, notiamo che, posto

$$p(t) = \sum_{n \geqslant 2} \frac{t^{n-2} (\|A\|)^n}{n!},$$

vale $p(t) = \dfrac{e^{t\|A\|} - 1 - t\|A\|}{t^2}$, $t \neq 0$, si vede che la serie che compare nella (8.8) è (totalmente) convergente per $h \in [-1, 1]$, e si può passare al limite per $h \to 0$. Dunque, scelto $x_0 \in E$

arbitrario e posto $x(t) = e^{tA}x_0$, quanto provato sopra implica che $x(t)$ risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Per esempio, la soluzione di

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(t,x)}{\partial t} = \displaystyle\int_a^b k(x,y)f(t,y)\,dy = Af(t,x) \\ f(0,x) = \varphi(x), \end{cases}$$

sotto ipotesi opportune su k e φ, è data da $f(t,x) = e^{tA}\varphi(x)$.

2. Sia $T = T^*$ un operatore lineare, continuo e autoaggiunto sullo spazio di Hilbert H, con spettro $\sigma(T)$ costituito unicamente da una successione di autovalori $\{\lambda_k\}_k \subset \mathbb{R}$ con base ortonormale associata $(e_k)_k$. Poniamo, per $t \in \mathbb{R}$ e $x \in H$,

$$A(t)x = \sum_k e^{it\lambda_k}(x,e_k)e_k \Rightarrow (A(t)x, e_j) = e^{it\lambda_j}(x,e_j). \tag{8.9}$$

Quindi,

$$\sum_j |(A(t)x,e_j)|^2 = \sum_j |e^{it\lambda_j}(x,e_j)|^2 = \sum_j |(x,e_j)|^2 = \|x\|^2 < +\infty,$$

e ne segue che, per ogni $t \in \mathbb{R}$, $A(t) \in \mathcal{L}(H)$ con $\|A(t)\| \leqslant 1$. Inoltre, si dimostra facilmente che $A \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(H))$ e, in effetti, che $A \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{L}(H))$. Direttamente dalla definizione, si ha $A(0) = I$. Per ogni $s,t \in \mathbb{R}$, $A(s)A(t) = A(s+t)$. Infatti, per ogni $x \in H$,

$$\begin{aligned} A(s)A(t)x &= A(s)\left[\sum_k e^{it\lambda_k}(x,e_k)e_k\right] = \sum_j e^{is\lambda_j}\left(\sum_k e^{it\lambda_k}(x,e_k)e_k, e_j\right)e_j \\ &= \sum_j e^{is\lambda_j}e^{it\lambda_j}(x,e_j)e_j = \sum_j e^{i(s+t)\lambda_j}(x,e_j)e_j = A(s+t)x. \end{aligned}$$

Dunque, per ogni $t \in \mathbb{R}$, $(A(t))^{-1} = A(-t)$. Derivando termine a termine, ricordando che $\lambda_k \in \mathbb{R}$, e sfruttando le proprietà di convergenza della serie che definisce $A(t)$, troviamo anche

$$\begin{aligned} \partial_t A(t)x = i\sum_k \lambda_k e^{it\lambda_k}(x,e_k)e_k = i\sum_k e^{it\lambda_k}(x,Te_k)e_k &= \sum_k e^{it\lambda_k}(Tx,e_k)e_k &&= iA(t)Tx \\ = i\sum_k e^{it\lambda_k}(x,e_k)Te_k &= iT\left[\sum_k e^{it\lambda_k}(x,e_k)e_k\right] &&= iTA(t)x, \end{aligned}$$

cioè, $\partial_t A(t) = iTA(t) = iA(t)T$. Ne segue, similmente a quanto già osservato al punto 1., che la funzione $x(t) = A(t)x_0$, $x_0 \in H$, è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = iTx(t) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Dato che $\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -T^2 x(t)$, se $S = T^2 \in \mathcal{L}(H)$ (cfr. Esercizio 4.7), la medesima funzione $x(t)$ risolve anche il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}x(t) + Sx(t) = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = iTx_0. \end{cases}$$

8.14 Commento. *Definendo* $B(t) = e^{itT}$ *come nella* (8.7)*, con* itT *al posto di* tA*, si ottiene, con dimostrazioni del tutto analoghe, un gruppo di operatori invertibili tali che* $B(0) = I$, $B(s+t) = B(s)B(t)$, $(B(t))^{-1} = B(-t)$, $\frac{d}{dt}B(t) = iTB(t)$, $s, t \in \mathbb{R}$*. Si dimostra che che la famiglia di operatori* $A(t)$ *definita tramite la* (8.9) *soddisfa* $A(t) = B(t)$*. Infatti, sia* $A(t)$ *che* $B(t)$ *soddisfano il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}W(t) = iTW(t) \\ W(0) = I. \end{cases}$$

Posto allora $Q(t) = A(t)B(-t)$*, si trova* $Q(0) = I$ *e, utilizzando la regola di derivazione a catena,*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Q(t) &= \left[\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)B(-t)\right] + \left[A(t)\left(\frac{d}{dt}B(-t)\right)\right] = iTA(t)B(-t) + A(t)(-iTB(-t)) \\ &= iTQ(t) - iTQ(t) = 0, \end{aligned}$$

dato che, come nel punto 1., $TA(t) = A(t)T$*. Dunque,* $\forall t \in \mathbb{R}$ $Q(t) = A(t)B(-t) = I$*, e, componendo a destra con* $B(t)$*, si ottiene* $A(t) = B(t)$, $t \in \mathbb{R}$*, come affermato. Quanto illustrato brevemente in questa sezione suggerisce come sia possibile (e utile) definire* $f(T)$*, sotto opportune ipotesi, con* T *operatore lineare e* f *funzione. Ciò può essere ottenuto sia "direttamente", come nel punto 1. (quando è disponibile, per esempio, uno sviluppo in serie di potenze di* f*), sia "indirettamente", operando sullo spettro di* T*, come nel punto 2. (in spazi di Hilbert, quando lo spettro di* T *è discreto e formato solo da autovalori, con un'associata base di autovettori).*

8.2 Serie e trasformate di Fourier

8.2.1 Il principio di indeterminazione di Heisenberg

8.15 Teorema. *Siano* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ *e* $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$*. Allora*

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant 2\|(x - x_0)\varphi(x)\|_{L^2(\mathbb{R})}\|(\xi - \xi_0)\widehat{\varphi}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Dimostrazione. **Passo I.** Sia $x_0 = \xi_0 = 0$. Integrazione per parti $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \int \varphi(x)\overline{\varphi(x)}\,dx = -\int x(\varphi\overline{\varphi})'(x)\,dx = -\int x(\varphi'\overline{\varphi} + \varphi\overline{\varphi'})(x)\,dx \\ &= -2\int x\mathrm{Re}\,\big(\varphi'(x)\overline{\varphi}(x)\big)\,dx.\end{aligned}$$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz $\Rightarrow$

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant 2\int |x\varphi(x)||\varphi'(x)|\,dx \leqslant 2\|x\varphi(x)\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\varphi'\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Quindi

$$\|\varphi'\|_{L^2(\mathbb{R})} \overset{\text{Teorema 7.6}}{=} \|\widehat{\varphi'}\|_{L^2(\mathbb{R})} \overset{(*)}{=} \|\xi\widehat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

dove l'uguaglianza $(*)$ vale grazie all'Esercizio 7.6.

Passo II. Sia $\psi(x) := e^{-ix\xi_0}\varphi(x+x_0)$. Si calcola $\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}$ e

$$\|x\psi(x)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|(x-x_0)\varphi(x)\|_{L^2(\mathbb{R})}, \qquad \|\xi\widehat{\psi}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|(\xi-\xi_0)\widehat{\varphi}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Applicando la formula con $x_0 = \xi_0 = 0$ dimostrata al Passo I a ψ si ottiene l'enunciato. ■

Enunciamo, senza dimostrazione, il seguente risultato:

8.16 Teorema (Amrein, Berthier)**.** *Siano $E, F \subset \mathbb{R}$ misurabili e di misura finita. Allora*

$$\exists\, C \geqslant 0 \quad \forall\, f \in L^2(\mathbb{R}): \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C\big(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}\setminus E)} + \|\mathscr{F}f\|_{L^2(\mathbb{R}\setminus F)}\big).$$

In particolare: f e $\mathscr{F}f$ hanno simultaneamente supporto compatto se e solo se $f = 0$.

8.2.2 Serie trigonometriche ed integrali di Fourier

Dai risultati della prima parte (Capitolo 9), sappiamo che è possibile approssimare funzioni periodiche L^2 attraverso polinomi trigonometrici[12],

$$T_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx + b_n\sin nx), \quad N \in \mathbb{N}, \tag{8.10}$$

dove a_0, a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$, sono i coefficienti della *serie trigonometrica*. In questa sezione, f denota inizialmente una funzione a valori in $\mathbb{C}$, definita su $(-\pi,\pi)$, estesa a $\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ come funzione periodica di periodo 2π. Il successivo Teorema 8.17, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio, è un risultato notevole sui polinomi trigonometrici.

[12] Una dimostrazione di questo fatto si trova, per esempio, in W. Rudin, Analisi Reale e Complessa, §4.23-4.25.

8.17 Teorema. *Sia $f \in L^2(-\pi,\pi)$. Poniamo*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

I coefficienti di Fourier a_n e b_n così definiti rendono minima la quantità

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x) - \frac{\tilde{a}_0}{2} - \sum_{n=1}^{N}(\tilde{a}_n \cos nx + \tilde{b}_n \sin nx)\right|^2 dx, \qquad \tilde{a}_0, \tilde{a}_n, \tilde{b}_n \in \mathbb{C}.$$

Si dimostra anche che $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale completo in $L^2(-\pi,\pi)$, ovvero, si può considerare lo *sviluppo di f in serie di Fourier* (trigonometrica),

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

con convergenza nel senso di $L^2(-\pi,\pi)$. Essendo

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2},\ \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

troviamo

$$\begin{aligned} T_N(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} + b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} e^{inx}\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right) + \sum_{n=1}^{N} e^{-inx}\left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n}\frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \sum_{n=1}^{n}\frac{a_n + ib_n}{2}e^{-inx}. \end{aligned}$$

Definendo

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{a_n - ib_n}{2} & \text{per } n \geqslant 1, \\ \dfrac{a_0}{2} & \text{per } n = 0, \\ \dfrac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} & \text{per } n \leqslant -1, \end{cases} \tag{8.11}$$

si ha

$$T_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

Passando al limite per $N \to +\infty$, troviamo

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \tag{8.12}$$

sempre nel senso della convergenza in $L^2(-\pi,\pi)$. La (8.12) è la serie di Fourier di f in forma complessa. Esaminiamo ora una condizione per la convergenza puntuale. Dalle (8.11) si ricava

$$\begin{aligned} a_n &= \quad c_n + c_{-n}, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}), \quad\ n \in \mathbb{N}, \\ c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Come è noto, $\left\{\dfrac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ è un sistema ortonormale completo in $L^2(-\pi,\pi)$. Ponendo $e_n(x) = \dfrac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$, i coefficienti sono

$$f_n = (f, e_n)_{L^2(-\pi,\pi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\,dt = c_n\sqrt{2\pi}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

e definiamo, per $N \in \mathbb{N}_0$,

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} f_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-t)}\,dt. \tag{8.13}$$

Calcoliamo, per $e^{iz} \neq 1$,

$$\begin{aligned} D_N(z) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{inz} = \frac{1}{2\pi}e^{-iNz}\sum_{n=0}^{2N} e^{inz} = \frac{1}{2\pi}e^{-iNz}\frac{e^{i(2N+1)z-1}}{e^{iz}-1} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(N+\frac{1}{2})z} - e^{-i(N+\frac{1}{2})z}}{e^{i\frac{z}{2}} - e^{-i\frac{z}{2}}} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}, \end{aligned}$$

ed estendiamo D_N per continuità, ove $e^{iz} = 1$, ponendola uguale a $\dfrac{2N+1}{2\pi}$. La funzione D_N è detta *Nucleo di Dirichlet*, ed ha le seguenti proprietà:

(i) D_N è una funzione periodica di periodo 2π, a valori reali, definita su tutto $\mathbb{R}$;

(ii) D_N è una funzione pari;

(iii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_N(z)\,dz = 1$.

Dalla (8.13), sfruttando la parità di D_N e la periodicità della funzione integranda, con il cambio di variabile $t = x + z \Leftrightarrow z = -x + t$, otteniamo

$$S_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_N(x-t)\,dt = \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+z)D_N(z)\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)D_N(z)\,dz,$$

da cui segue, grazie alla (iii),

$$S_N(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+z)-f(x)}{z}\,\frac{z}{2\sin\frac{z}{2}}\,\sin\left(\frac{2N+1}{2}z\right)dz.$$

8.18 Lemma (di Riemann-Lebesgue). $g \in L^1(a,b) \Rightarrow \lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b g(z)\,\sin(\lambda z)\,dz = 0.$

Dimostrazione. Per $g = \varphi \in C_0^1([a,b]) \subset L^1(a,b)$, la dimostrazione è immediata:

$$\int_a^b g(z)\,\sin(\lambda z)\,dz = \left[-\varphi(z)\,\frac{\cos(\lambda z)}{\lambda}\right]_a^b + \int_a^b \varphi'(z)\,\frac{\cos(\lambda z)}{\lambda}\,dz \xrightarrow{\lambda\to+\infty} 0.$$

Per g arbitraria in $L^1(a,b)$, l'enunciato si ottiene dalla densità[13] di $C_0^1([a,b])$ in $L^1(a,b)$ (cfr. risultati della prima parte). Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\varphi \in C_0^1([a,b])$ tale che $\|g-\varphi\|_{L^1(a,b)} < \frac{\varepsilon}{2}$, ed esiste Λ tale che, per ogni $\lambda > \Lambda$, $\left|\int_a^b \varphi(z)\,\sin(\lambda z)\,dz\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dunque, per $\lambda > \Lambda$,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b g(z)\,\sin(\lambda z)\,dz\right| &\leqslant \left|\int_a^b [g(z)-\varphi(z)]\,\sin(\lambda z)\,dz\right| + \left|\int_a^b \varphi(z)\,\sin(\lambda z)\,dz\right| \\ &\leqslant \|g-\varphi\|_{L^1(a,b)} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

■

8.19 Teorema. *Sia $f \in L^1(-\pi,\pi)$, estesa per periodicità a $\mathbb{R}\backslash\{(2k+1)\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $x \in (-\pi,\pi)$, ed esista $\delta > 0$ tale che*

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left|\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\,dz\right| < +\infty \tag{8.14}$$

(Condizione di Dini). Allora, $\lim_{N\to+\infty} S_N(x) = f(x)$.

Dimostrazione. Per la Condizione di Dini, posto $h_x(z) = \dfrac{f(x+z)-f(x)}{z}$, risulta $h_x \in L^1(-\pi,\pi)_z$. Pertanto, applicando il Lemma 8.18 con $\lambda = N + \frac{1}{2}$, troviamo

$$S_N(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\;\overbrace{\frac{z}{2\sin\frac{z}{2}}}^{\in L^\infty(-\pi,\pi)}}_{\in L^1(-\pi,\pi)} \sin\left(\frac{2N+1}{2}z\right)dz \xrightarrow{N\to+\infty} 0.$$

■

[13] In alternativa, si osserva che per $g = \chi_{[\alpha,\beta]}$, $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$, si ha

$$\int_a^b g(z)\,\sin(\lambda z)\,dz = \int_\alpha^\beta \sin(\lambda z)\,dz = \frac{1}{\lambda}[\cos(\lambda\alpha) - \cos(\lambda\beta)] \xrightarrow{\lambda\to+\infty} 0,$$

e la famiglia di funzioni $\{\chi_{[\alpha,\beta]}\}_{a\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant b}$ è totale in $L^1(a,b)$.

Osservazioni. Vi sono funzioni, anche continue, definite su $I = (-\pi, \pi)$, la cui serie di Fourier non converge in ogni punto di I (cfr. W. Rudin, Analisi Reale e Complessa, §5.11). Pertanto, per garantire la convergenza puntuale, è effettivamente necessario imporre condizioni sulla funzione f, quali, per esempio, la Condizione di Dini.

Operando separatamente a sinistra ed a destra di $x \in (-\pi, \pi)$, il Teorema 8.19 si generalizza facilmente come segue.

8.20 Corollario. *Sia f come nel Teorema 8.19. Poniamo, per $x \in (-\pi, \pi)$, $f(x \pm 0) = \lim_{\varepsilon \to 0^\pm} f(x + \varepsilon) \in \mathbb{C}$, ed esista $\delta > 0$ tale che*

$$\int_{-\delta}^{0} \left| \frac{f(x+z) - f(x-0)}{z} \, dz \right| < +\infty \ \text{ e } \int_{0}^{\delta} \left| \frac{f(x+z) - f(x+0)}{z} \, dz \right| < +\infty.$$

Allora $\lim_{N \to +\infty} S_N(x) = \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$.

8.21 Definizione. *Una funzione f è detta regolare a tratti nell'intervallo $[a, b]$ se è continua e derivabile a tratti nell'intervallo $[a, b]$, cioè se:*

- $\forall x_0 \in (a, b)$ *esistono finiti* $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x)$ *e* $\lim_{x \to x_0^\pm} f'(x)$*;*
- *esistono finiti* $\lim_{x \to a^+} f(x)$, $\lim_{x \to a^+} f'(x)$, $\lim_{x \to b^-} f(x)$, $\lim_{x \to b^-} f'(x)$.

8.22 Teorema (di Dirichlet)**.** *Se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, periodica di periodo 2π, è regolare a tratti nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, la sua serie di Fourier converge in ogni punto $x \in \mathbb{R}$, ovvero, per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste finito $\lim_{N \to +\infty} S_N(x)$, con $S_N(x)$ definita nella* (8.13)*. Esplicitamente, si ha*

$$\lim_{N \to +\infty} S_N(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

In particolare, la serie di Fourier di f converge a $f(x)$ in ogni punto $x \in \mathbb{R}$ ove f è continua.

Dimostrazione. Immediata, osservando che una funzione regolare a tratti soddisfa le ipotesi del Corollario 8.20, e che le ipotesi permettono di estendere il risultato anche agli estremi dell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ∎

Osservazioni. Abbiamo provato che una funzione f, periodica di periodo 2π, che soddisfa le condizioni di Dini (in particolare, che è regolare a tratti) si può rappresentare tramite la sua serie di Fourier, cioè, *come una sovrapposizione di infiniti termini oscillanti* (*"armoniche"*). La mappa

$$f \mapsto (f_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt,$$

rappresenta tale decomposizione in termini oscillanti, dove il parametro discreto $n \in \mathbb{Z}$ è associato alla frequenza delle oscillazioni. La formula $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{inx}$ rappresenta l'inversa di tale mappa (*"formula di ricostruzione"*). Vogliamo ora estendere tale tipo di rappresentazione a funzioni non periodiche. Osserveremo che ciò è possibile, sotto condizioni opportune, e conduce alla definizione dei concetti di integrali di Fourier e trasformata di Fourier.

Assumiamo ora che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ soddisfi $f \in L^1(\mathbb{R})$ e la Condizione di Dini (8.14) in ogni punto $x \in \mathbb{R}$. Considerando la restrizione di f all'intervallo $(-l, l)$, $l > 0$, e la sua successiva estensione per periodicità, con un cambio di scala sull'asse delle ascisse è possibile scriverne lo sviluppo in serie di Fourier, nella forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right], \quad x \in (-l, l), \tag{8.15}$$

dove

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right) dt, \; b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right) dt, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Sostituendo le espressioni di a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}_0$, nella (8.15), otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt \\ &\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right) dt + \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right) dt \right] \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos\left[\frac{n\pi}{l}(t-x)\right] dt, \quad x \in (-l, l). \end{aligned} \tag{8.16}$$

Seguiamo, euristicamente, un primo procedimento, puramente formale, e consideriamo il limite per $l \to +\infty$ della (8.16). Per l'ipotesi $f \in L^1(\mathbb{R})$, il primo termine tende a 0. Il secondo termine può essere considerato un analogo di una somma di Riemann associata alla funzione

$$F(\tau) = \int_{-l}^{l} f(t) \cos[\tau(t-x)]\, dt$$

per l'integrale

$$\int_0^{+\infty} F(\tau)\, d\tau,$$

scegliendo $\tau_n = \frac{n\pi}{l}$ e $\mu(I_n) = \frac{\pi}{l}$. Il passaggio formale al limite per $l \to +\infty$ nella (8.16) suggerisce quindi l'uguaglianza

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos[\tau(t-x)]\, dt \right\} d\tau, \tag{8.17}$$

che è la rappresentazione integrale cercata. Ponendo

$$a_\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\tau t)\, dt, \quad b_\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\tau t)\, dt,$$

si può scrivere la (8.17) nella forma seguente, che "ricorda le serie di Fourier"[14]:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [a_\tau \cos(\tau x) + b_\tau \sin(\tau x)]\, d\tau. \tag{8.18}$$

Abbiamo ottenuto la (8.18), detta *formula di Fourier*, grazie ad un passaggio formale al limite. Diamone una dimostrazione diretta[15].

8.23 Teorema. *Assumiamo che $f \in L^1(\mathbb{R})$ soddisfi la condizione di Dini nel punto $x \in \mathbb{R}$. Allora si ha*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos[\tau(t-x)]\, dt \right\} d\tau.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{A} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos[\tau(t-x)]\, dt \right\} d\tau, \tag{8.19}$$

e dimostriamo che $\lim_{A\to+\infty} J(A) = f(x)$. Le ipotesi implicano che l'integrale interno è assolutamente convergente per ogni $\tau, x \in \mathbb{R}$, così come l'integrale doppio per ogni $A, x \in \mathbb{R}$. Applicando il Teorema di Fubini-Tonelli ed il cambio di variabile $z = t - x$, troviamo

$$\begin{aligned} J(A) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{A} f(t) \cos[\tau(t-x)]\, d\tau dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin[A(t-x)]}{t-x}\, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+z) \frac{\sin(Az)}{z}\, dz. \end{aligned}$$

L'uguaglianza $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(Az)}{z}\, dz = 1$, $A > 0$, permette di scrivere

$$\begin{aligned} J(A) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \sin(Az)\, dz \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-N}^{+N} \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \sin(Az)\, dz && (8.20) \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{|z|\geqslant N} \frac{f(x+z)}{z} \sin(Az)\, dz && (8.21) \\ &- \frac{f(x)}{\pi} \int_{|z|\geqslant N} \frac{\sin(Az)}{z}\, dz. && (8.22) \end{aligned}$$

I termini in (8.21) e (8.22) sono uniformemente convergenti rispetto ad $A \geqslant 1$, e possono entrambi essere resi minori di $\frac{\varepsilon}{3}$ in modulo, $\varepsilon > 0$, scegliendo N sufficientemente grande. Con tale N fissato, il termine in (8.20) è infinitesimo per $A \to +\infty$, grazie alla Condizione di Dini ed al Lemma 8.18. Pertanto, si ha $\lim_{A\to+\infty} [J(A) - f(x)] = 0$, come affermato. ■

[14] Cioè, sostituendo il simbolo di serie ed il corrispondente indice (discreto) con un integrale esteso all'intervallo $[0, +\infty)$ rispetto alla variabile (reale) τ.

[15] Il procedimento formale di "passaggio al limite" illustrato per ottenere la (8.17) a partire dalla (8.16) si potrebbe rendere rigoroso, ma la dimostrazione diretta del Teorema 8.23 è più agevole.

Dato che l'integrale interno nella (8.17) è una funzione pari, possiamo riscriverla nella forma

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos[\tau(t-x)]\, dt \right\} d\tau. \tag{8.23}$$

D'altra parte, l'ipotesi $f \in L^1(\mathbb{R})$ implica che l'integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin[\tau(t-x)]\, dt$ esiste finito, ed è una funzione dispari di τ. Pertanto,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin[\tau(t-x)]\, dt \right\} d\tau = 0, \tag{8.24}$$

purchè l'integrale in τ venga considerato nel senso del suo valor principale, cioè come limite, per $N \to +\infty$, dell'integrale esteso all'intervallo $[-N, N]$. Sommando membro a membro la (8.23) e la (8.24) moltiplicata per $-i$, otteniamo infine l'uguaglianza

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\tau(t-x)} dt \right\} d\tau,} \tag{8.25}$$

detta *formula di Fourier complessa*. La (8.25) può essere rappresentata tramite le due uguaglianze

$$g(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\tau} f(t)\, dt$$

e

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\tau} g(\tau)\, dt.$$

Osserviamo che la prima ha senso per ogni funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$, e produce la trasformata di Fourier $\widehat{f}$ introdotta nella (7.1). La seconda, che esprime la formula di inversione, è più delicata, dato che, in questo approccio, è valida solo nel senso del valore principale e sotto la condizione di Dini. Il Teorema 7.3 nella Sezione 7.1 dimostra la validità della formula di inversione sotto "ipotesi simmetriche" su f e $\widehat{f}$. Come già sottolineato sopra, nell'ambito L^1 non è possibile evitare di richiedere ipotesi opportune per la validità della formula di inversione, a differenza di quanto accade, per esempio, nell'ambito L^2. Quest'ultimo è quindi più adatto, in linea di principio, per le applicazioni. Tuttavia, perdiamo la possibilità di esprimere $\widehat{f}$, in generale, nella forma integrale di partenza (salvo il fatto di poterla impiegare, per esempio, su domini sferici e poi passare al limite, cfr. Corollario 7.7).

La procedura illustrata sopra, che mostra come arrivare alle formule integrali di Fourier ed alla definizione di trasformata di Fourier, a partire dalle classiche serie di Fourier trigonometriche, rende anche conto dell'interpretazione di $\widehat{f}$, di uso comune, in termini di una "decomposizione di f rispetto a termini oscillanti", con un range di frequenze continuo. Similmente, si evince la necessità di imporre condizioni opportune per garantire la validità di una "formula di ricostruzione puntuale" (quasi ovunque), fornita dai teoremi di inversione, in analogia a quanto osservato per la convergenza puntuale delle usuali serie di Fourier trigonometriche.

8.2.3 Trasformata di Fourier e distribuzioni

Per $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ vale

$$T_{\hat{f}}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\phi(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\hat{\phi}(\xi)\,d\xi = T_f(\hat{\phi}).$$

Questo suggerisce di definire la trasformata $FT = \hat{T}$ di una distribuzione $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ tramite

$$\hat{T}(\phi) := T(\hat{\phi}), \qquad \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

Sfortunatamente questa definizione non ha senso, poiché $\hat{\phi} \notin \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ se $\phi \neq 0$.

8.24 Lemma. *Sia $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ e $\hat{\phi} \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Allora $\phi = 0$.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $f(z) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixz}\phi(x)\,dx$.

Utilizzando $|e^{-ixz}| = e^{x \operatorname{Im} z}$ e il fatto che ϕ ha supporto compatto, f definisce una funziona intera (i.e. olomorfa in tutto $\mathbb{C}$). Ovviamente $f(\xi) = \hat{\phi}(\xi)$ per tutti $\xi \in \mathbb{R}$.

supp $\hat{\phi}$ compatto $\Rightarrow \exists\, a \in \mathbb{R} \quad \forall\, \xi > a: \quad f(\xi) = \hat{\phi}(\xi) = 0.$

Principio di identità per le funzioni olomorfe $\Rightarrow f(z) = 0$ per tutti $z \Rightarrow \hat{\phi} \equiv 0$.

Teorema 7.3 $\Rightarrow \phi = 0$ quasi ovunque in $\mathbb{R}$.

ϕ continua $\Rightarrow \phi \equiv 0$ in $\mathbb{R}$. ∎

Gli spazi $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ quindi non sono adatti alla trasformata di Fourier. Per questo motivo si introduce lo spazio $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ di tutte le funzioni $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ per le quali

$$\|\varphi\|_{(N)} := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, \\ k+|\alpha| \leqslant N}} |x|^k |\partial_x^\alpha \varphi(x)| < +\infty \qquad \forall\, N \in \mathbb{N}.$$

$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ è detto spazio di Schwartz oppure spazio delle funzioni a decrescenza rapida. Ovviamente, $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Si può dimostrare che

$$\hat{\ }: \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

è un'isomorphismo con inversa $\check{\ }$. Si definisce poi lo spazio delle distribuzioni temperate $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ di tutte le applicazioni lineari $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ che sono continue, nel senso che

$$\exists\, N = N(T) \quad \exists\, C = C(T) \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n): \quad |T(\varphi)| \leqslant C\|\varphi\|_{(N)}.$$

Per $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ si può definire la trasformata di Fourier $\hat{T} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ come indicato, cioè

$$\hat{T}(\varphi) := T(\hat{\varphi}), \qquad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Analogamente si definisce $\check{T}$ tramite $\check{T}(\varphi) = T(\check{\varphi})$. Si ottiene un isomorphismo $T \mapsto \widehat{T}$ in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ con inversa $T \mapsto \check{T}$.

Per $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, si definisce la distribuzione regolare $T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$,

$$T_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\, dx, \qquad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Per $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e per $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ vale $\widehat{T_f} = T_{\hat{f}}$, dove $\hat{f}$ è definita come nelle Sezioni 7.1 e 7.2, rispettivamente (cioè, $\widehat{T_f} = T_{\mathscr{F}f}$ per $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$). Così come la distribuzione regolare T_f, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, viene spesso indicata semplicemente con f, $\widehat{T_f}$ è generalmente indicata con $\hat{f}$, indifferentemente per $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ o $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (ed anche, nel senso di $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, per $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1,2) \cup (2+\infty])$.

Le distribuzioni temperate e le loro trasformate di Fourier vengono studiate dettagliatamente nel corso *Analisi Superiore.*

9 Soluzioni degli esercizi

9.1 Capitolo 1

Esercizio 1.1. *Utilizziamo il cambio di variabili* $y = Ax$, $dy = |\det A|\, dx$.

$$\|Tf\|_{L^2}^2 = \int |f(Ax)|^2\, dx = |\det A|^{-1} \int |f(y)|^2\, dy = |\det A|^{-1} \|f\|_{L^2}^2.$$

Quindi $T \in \mathscr{L}(L^2)$ *con* $\|T\| \leqslant |\det A|^{-1/2}$. *Inoltre*

$$(Tf, g) = \int f(Ax)\overline{g(x)}\, dx = \int f(y)\overline{|\det A|^{-1} g(A^{-1}y)}\, dy.$$

Quindi $(T^*g)(y) = |\det A|^{-1} g(A^{-1}y)$, $g \in L^2$.

Esercizio 1.2. $S := T^*T - TT^*$ *è autoaggiunto. Allora*

$$\begin{aligned} T \text{ normale } &\iff T^*T = TT^* \iff S = 0 \overset{1.7}{\iff} (Sx, x) = 0 \quad \forall\, x \in H \\ &\iff (T^*Tx, x) = (TT^*x, x) \quad \forall\, x \in H \\ &\iff (Tx, Tx) = (T^*x, T^*x) \quad \forall\, x \in H \\ &\iff \|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2 \quad \forall\, x \in H. \end{aligned}$$

Esercizio 1.3. *"*$\Leftarrow$*":* $\operatorname{im} T = \overline{\operatorname{im} T} = (\operatorname{im} T)^{\perp\perp} = (\ker T^*)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H$

"$\Rightarrow$*":* $\ker T^* = (\operatorname{im} T)^{\perp} = H^{\perp} = \{0\} \Rightarrow T^*$ *iniettivo.*

$\operatorname{im} T = H$ *è ovviamente chiuso.*

Esercizio 1.4. *"*$\Rightarrow$*":* PQ *proiezione ortogonale* $\Rightarrow PQ = (PQ)^* = Q^*P^* = QP$.

"$\Leftarrow$*":* $PQ = QP \Rightarrow \begin{cases} (PQ)^2 = PQPQ = PPQQ = PQ, \\ (PQ)^* = (QP)^* = P^*Q^* = PQ \end{cases} \Rightarrow PQ$ *proiezione ortogonale.*

Sia PQ *una proiezione ortogonale.*

$x \in \operatorname{im} PQ \Rightarrow \exists\, y \in H : \quad x = PQy = P(Qy) = Q(Py) \Rightarrow x \in \operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q$.

$x \in \operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q \Rightarrow PQx = Px = x \Rightarrow x \in \operatorname{im} PQ$.

Esercizio 1.5. $H = \operatorname{im} Q \oplus \ker Q$

Quindi: $x \in \operatorname{im} Q \iff Qx = x$.

Quindi: $\operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} Q \iff QP = P$.

- $QP = P \Rightarrow P = P^* = (QP)^* = P^*Q^* = PQ$
  $\Rightarrow \|Px\| = \|PQx\| \leqslant \|P\|\|Qx\| \leqslant \|Qx\| \quad \forall\, x \in H$.
- $\|Px\| \leqslant \|Qx\| \quad \forall\, x \in H \Rightarrow \|P(1-Q)y\| \leqslant \|Q(1-Q)y\| = 0 \quad \forall\, y \in H$
  $\Rightarrow P(1-Q) = 0 \Rightarrow P = PQ \Rightarrow P = P^* = (PQ)^* = Q^*P^* = QP$.

Esercizio 1.6. *Osserviamo che* $(P+Q)^* = P^* + Q^* = P + Q$.

"$\Leftarrow$*:"* $PQ = QP = 0 \Rightarrow (P+Q)^2 = P^2 + PQ + QP + Q^2 = P + Q$.

"$\Rightarrow$*:"* $P + Q = (P+Q)^2 = P^2 + PQ + QP + Q^2 \Rightarrow PQ + QP = 0$

$\Rightarrow PQ = -QP$ $(*)$

Componendo con P *a destra ed a sinistra* $\Rightarrow PQ = -PQP$ *e* $-QP = PQP$

$\Rightarrow PQ = QP$ $(**)$

$(*)$, $(**)$ $\Rightarrow PQ = QP = 0$.

Sia $P+Q$ *una proiezione ortogonale.*

$x \in \operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q \Rightarrow x = Px = P(Qx) = 0 \Rightarrow \operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q = \{0\}$.

Ovviamente, $\operatorname{im}(P+Q) \subseteq \operatorname{im} P + \operatorname{im} Q$.

$x \in \operatorname{im} P + \operatorname{im} Q \Rightarrow \exists\, y, z \in H : \quad x = Py + Qz$

$\Rightarrow (P+Q)x = P^2y + PQz + QPy + Q^2z = Py + Qz = x$

$\Rightarrow x \in \operatorname{im}(P+Q)$

9.2 Capitolo 2

Esercizio 2.1. *"$\Rightarrow$": $T \in \mathscr{K}(H)$, $T^* \in \mathscr{L}(H)$ $\overset{\textit{Teorema } 2.6,c)}{\Rightarrow}$ $T^*T \in \mathscr{K}(H)$*

"$\Leftarrow$": Sia $(x_n) \subset H$ successione limitata, $M := \sup_n \|x_n\|$.

$T^*T \in \mathscr{K}(H) \Rightarrow \exists\, (x_{n_k}) : \quad (T^*Tx_{n_k})$ è convergente.

Osserviamo che

$$\|Tx - Ty\|^2 = (T(x-y), T(x-y)) = |(x-y, T^*T(x-y))| \leqslant \|x-y\| \|T^*Tx - T^*Ty\|.$$

Ne segue

$\|Tx_{n_k} - Tx_{n_\ell}\|^2 \leqslant 2M\|T^*Tx_{n_k} - T^*Tx_{n_\ell}\|^2$

$\Rightarrow (Tx_{n_k})$ successione di Cauchy, quindi convergente.

Teorema 2.8 $\Rightarrow T \in \mathscr{K}(H)$.

Esercizio 2.2. *a) Sia $x \in V^\perp$ e $y \in V$ arbitrario.*

$Ty \in V$, $T = T^* \Rightarrow (Tx, y) = (x, Ty) = 0 \Rightarrow Tx \in V^\perp$.

b) Sia $(v_n) \subset V$ successione limitata.

(v_n) limitata in H, $T \in \mathscr{K}(H) \Rightarrow \exists\, (v_{n_k}) : \quad (Tv_{n_k})$ convergente in H.

$(Tv_{n_k}) \subset V$, V chiuso $\Rightarrow (Tv_{n_k})$ convergente in V.

Teorema 2.8 $\Rightarrow T|_V \in \mathscr{K}(V)$.

Esercizio 2.3. *Sia $S := aI - T$. Allora*

$$S(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (s_1x_1, s_2x_2, s_3x_3, s_4x_4, \ldots)$$

con la successione $s_n = a - a_n$. Nota che $s_n \to 0$ per $n \to +\infty$.

$M := \sup_n |s_n|$

$\Rightarrow \|Sx\|^2 = \sum_n |s_nx_n|^2 \leqslant M^2 \sum_n |x_n|^2 = M^2\|x\|^2 \quad \forall\, x \in \ell^2(\mathbb{N})$.

$\Rightarrow S \in \mathscr{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ con $\|T\| \leqslant M$.

Sia $S_N \in \mathscr{F}(\ell^2(\mathbb{N}))$ definito da $S_Nx = (s_1x_1, s_2x_2, \ldots, s_Nx_N, 0, 0, \ldots)$.

Sia dato $\varepsilon > 0$.

(s_n) infinitesima $\Rightarrow \exists\, N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geqslant N_0 : \quad |s_n| < \varepsilon$

$\Rightarrow \|S_Nx - Sx\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |s_nx_n|^2 < \varepsilon^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^2 \leqslant \varepsilon^2\|x\|^2 \quad \forall\, N \geqslant N_0 \quad \forall\, x \in \ell^2(\mathbb{N})$

$\Rightarrow \|S_N - S\| < \varepsilon \quad \forall\, N \geqslant N_0$

$\Rightarrow S_N \xrightarrow{N\to+\infty} S$

$\Rightarrow S \in \mathscr{K}(\ell^2(\mathbb{N}))$.

Esercizio 2.4. *Si ha*

$$
\begin{aligned}
(f_{ij}, f_{k\ell})_{L^2(A\times A)} &= \iint\limits_{A\times A} f_{ij}(s,t)\overline{f_{k\ell}(s,t)}\,dsdt = \int_A e_i(s)\overline{e_k(s)}\,ds \int_A e_j(t)\overline{e_\ell(t)}\,dt \\
&= (e_i, e_k)_{L^2(A)}(e_j, e_\ell)_{L^2(A)} = \begin{cases} 1 & i = k, j = \ell \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \{f_{ij}\}$ *sistema ortonormale.*
Sia $g \in L^2(A \times A)$. *Calcoliamo*

$$
\begin{aligned}
\|g\|^2_{L^2(A\times A)} &= \int_A \Big(\int_A |g(s,t)|^2\,ds \Big)\,dt = \int_A \|g(\cdot,t)\|^2_{L^2(A)}\,dt \\
&= \int_A \Big(\sum_j | \underbrace{(g(\cdot,t), e_j)_{L^2(A)}}_{=:G_j(t)} |^2 \Big)\,dt = \sum_j \int_A |G_j(t)|^2\,dt \\
&= \sum_j \|G_j\|^2_{L^2(A)} = \sum_j \sum_k |(G_j, e_k)_{L^2(A)}|^2 \\
&= \sum_{j,k} \Big| \int_A G_j(t)\overline{e_k(t)}\,dt \Big|^2 = \sum_{j,k} \Big| \int_A \int_A g(s,t)\overline{e_j(s)e_k(t)}\,dsdt \Big|^2 \\
&= \sum_{j,k} |(g, f_{jk})_{L^2(A\times A)}|^2.
\end{aligned}
$$

9.3 Capitolo 3

Esercizio 3.1. $S := I + T + \dots T^{N-1} \Rightarrow S(I-T) = (I-T)S = I - T^N = I \Rightarrow (I-T)^{-1} = S.$

Esercizio 3.2. 1) $f'' \equiv 0 \iff f(x) = px + q \ (p, q \in \mathbb{C})$

$\Rightarrow \ker T = \{f(x) = px + q \mid p, q \in \mathbb{C}\}$, $\dim \ker T = 2$.

$f \in \mathscr{C}([a,b])$ *data*, $g(x) := \int_a^x \int_a^y f(t)\,dt\,dy \Rightarrow g \in \mathscr{C}^2([a,b])$ *e* $g'' = f$.

$\Rightarrow T$ *suriettivo*, $\operatorname{codim} \operatorname{im} T = 0$.

2) *Come prima, ma tenendo conto della periodicità (che impone* $p = 0$*), troviamo:* $\ker T = \{f(x) = q \mid q \in \mathbb{C}\}$, $\dim \ker T = 1$.

Verifichamo che $\operatorname{im} T = \left\{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1) \mid \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0 \right\}$:

"$\subseteq$": $\int_0^{2\pi} Tf(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f''(x)\,dx = f'(2\pi) - f'(0) = 0.$

"$\supseteq$": Sia data f *con* $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$.

Sia $g(x) := \int_0^x \int_0^y f(t)\,dt\,dy + cx$ *con* $c = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^y f(t)\,dt\,dy$. *Osserviamo*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(g(x+2\pi) - g(x)) &= \frac{d}{dx}\Big(\int_x^{x+2\pi} \int_0^y f(t)\,dt\,dy + 2\pi c \Big) \\ &= \int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow g(x+2\pi) - g(x) \equiv \text{cost}$

$g(2\pi) - g(0) = 0 \Rightarrow g$ *è* 2π*-periodica. Si ha quindi* $f = g'' \in \operatorname{im} T$.

Inoltre, $\operatorname{codim} \operatorname{im} T = 1$ *(cfr. Esempio 3.6).*

3) $\ker T = \{(x_1, 0, 0, \dots) \mid x_1 \in \mathbb{C}\}$, $\dim \ker T = 1$,

$\operatorname{im} T = \{x \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid x_1 = 0\}$, $\operatorname{codim} \operatorname{im} T = 1$.

Esercizio 3.3. *Vale* $\mathbb{C}^m / \ker T \cong \operatorname{im} T$ *e quindi*

$$\operatorname{codim} \operatorname{im} T = n - \dim \mathbb{C}^m / \ker T = n - (m - \dim \ker T).$$

Quindi $\operatorname{ind} T = m - n$.

Esercizio 3.4. *Sia* $T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$.

"$\Leftarrow$": $Tx = 0 \iff T_1x = T_2x = 0 \iff x \in \ker(T_1 : \ker T_2 \to H_1) \iff x = 0$

$\Rightarrow T$ iniettivo.

$(x_1, x_2) \in H_1 \bigoplus H_2 \Rightarrow \exists\, x \in H$ con $T_2x = x_2$ e $x' \in \ker T_2$ con $T_1x' = x_1 - T_1x$.

$\Rightarrow T(x + x') = (x_1, x_2) \Rightarrow T$ suriettivo.

"$\Rightarrow$": Dato $x_2 \in H_2$,

T suriettivo $\Rightarrow \exists\, x \in H : \quad (0, x_2) = Tx = (T_1x, T_2x) \Rightarrow T_2x = x_2 \Rightarrow T_2$ suriettivo.

Dato $x_1 \in H_1$,

T suriettivo $\Rightarrow \exists\, x \in H : \quad (x_1, 0) = Tx = (T_1x, T_2x)$.

$\Rightarrow x \in \ker T_2$ e $T_1x = x_1 \Rightarrow T_1 : \ker T_2 \to H_1$ suriettivo.

Sia $x \in \ker T_2 \cap \ker T_1$.

$\Rightarrow Tx = (0, 0) \Rightarrow x = 0$ (dato che T iniettivo)

$\Rightarrow T_1 : \ker T_2 \to H_1$ iniettivo.

9.4 Capitolo 4

Esercizio 4.1. *Secondo quanto illustrato nell'Esempio* 4.3, *si trova* $\sigma(T) = h([-1,1])$.
Quindi $\sigma(T) = [-2,2]$ *nel caso a), e* $\sigma(T) = [0,2]$ *nel caso b).*
Supponiamo λ *sia un autovalore e* f *un'autofunzione, cioè*

$$h(x)f(x) = \lambda f(x) \qquad \forall\, x \in [-1,1].$$

a) Sia $x_0 \in [-1,1]$. *Supponiamo* $f(x_0) \neq 0$.
f *continua* $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall \begin{smallmatrix} x\in[-1,1], \\ |x-x_0|<\varepsilon \end{smallmatrix} : \quad f(x) \neq 0$
$\Rightarrow 2x = \lambda \quad \forall \begin{smallmatrix} x\in[-1,1], \\ |x-x_0|<\varepsilon \end{smallmatrix} \qquad ↯$
$\Rightarrow f = 0$ *su* $[-1,1] \Rightarrow$ *Non esiste nessun autovalore/autofunzione.*
b) Come sopra con $x_0 > 0$ *si vede che per ogni autofunzione* f *vale* $f(x) = 0 \quad \forall\, 0 \leqslant x \leqslant 1$.
Viceversa, $f(x) = 0 \quad \forall\, 0 \leqslant x \leqslant 1$ *implica* $(Tf)(x) = h(x)f(x) = 0$.
$\Rightarrow \lambda = 0$ *unico autovalore con* $\ker T = \{f \in C([-1,1]) \mid f(x) = 0 \quad \forall\, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

Esercizio 4.2. *a) Sia* $\lambda \in \mathbb{C}$.
$\overline{\lambda} I - T^* = (\lambda I - T)^*$, $\lambda I - T = (\overline{\lambda} I - T^*)^*$
$\overset{\textit{Teorema } 1.5,d)}{\Rightarrow} \overline{\lambda} I - T^*$ *invertibile* $\iff \lambda I - T$ *invertibile*
$\Rightarrow \lambda \in \rho(T) \iff \overline{\lambda} \in \rho(T^*)$
$\Rightarrow \lambda \in \sigma(T) = \mathbb{C}\backslash\rho(T) \iff \overline{\lambda} \in \sigma(T^*) = \mathbb{C}\backslash\rho(T^*)$.
b) $T^*T = I \Rightarrow 1 = \|T^*T\| \overset{\textit{Teorema } 1.5,e)}{=} \|T\|^2 \Rightarrow \|T\| = 1$
$\overset{\textit{Teorema } 4.3}{\Rightarrow} \sigma(T) \subseteq \{\lambda \mid |\lambda| \leqslant 1\}$.
Si ha anche
$TT^* = I \Rightarrow \lambda I - T = -T(I - \lambda T^*)$.
Ne segue
$|\lambda| < 1 \Rightarrow \|\lambda T^*\| = |\lambda|\|T^*\| = |\lambda|\|T\| < 1 \overset{\textit{Teorema } 3.1}{\Rightarrow} (I - \lambda T^*)$ *invertibile*
$\Rightarrow \lambda I - T$ *invertibile*
$\Rightarrow \{\lambda \mid |\lambda| < 1\} \subseteq \rho(T) \Rightarrow \sigma(T) \subseteq \{\lambda \mid |\lambda| = 1\}$.

Esercizio 4.3. *Sappiamo che* T^* *è dato da* $T^*(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$.
Esempio 4.4 $\Rightarrow \sigma(T^*) = \{\lambda \mid |\lambda| \leqslant 1\}$.
Esercizio 4.2 $\Rightarrow \sigma(T) = \sigma(T^{**}) = \{\bar{\lambda} \mid |\lambda| \leqslant 1\} = \{\lambda \mid |\lambda| \leqslant 1\}$.
$\ker T = \{0\} \Rightarrow \lambda = 0$ *non è autovalore.*
Sia $\lambda \neq 0$.
$Tx = \lambda x \iff (0, x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots) \iff x = 0$
$\Rightarrow \lambda$ *non è autovalore.*

Esercizio 4.4. *Seguire il procedimento riportato negli appunti. Nel seguito, T sia l'operatore integrale in L^2 con nucleo $k(x,y)$.*

a) $k(x,y) = xy = r_1(x)\overline{s_1(y)}$ *con* $r_1(x) = s_1(x) = x$.

(*Nota:* $\overline{k(y,x)} = \overline{yx} = xy = k(x,y) \Rightarrow T$ *autoaggiunto.*)

$$\left.\begin{aligned} &\sigma(T) = \{0, (r_1, s_1)\} \\ &(r_1, s_1) = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sigma(T) = \left\{0, \tfrac{1}{3}\right\}.$$

$\ker T = \langle s_1(x)\rangle^\perp$, $\ker\left(\frac{1}{3}I - T\right) = \langle r_1(x)\rangle$.

$$[(\lambda I - T)^{-1}g](x) = \frac{g(x)}{\lambda} + \frac{x}{\lambda(\lambda - 1/3)}\int_0^1 g(y)y\,dy, \qquad \lambda \notin \sigma(T).$$

b) $k(x,y) = xy + x^2y^2 = r_1(x)\overline{s_1(y)} + r_2(x)\overline{s_2(y)}$

con $r_1(x) = s_1(x) = x$ *e* $r_2(x) = s_2(x) = x^2$.

(*Nota:* $\overline{k(y,x)} = \overline{yx + y^2x^2} = xy + x^2y^2 = k(x,y) \Rightarrow T$ *autoaggiunto.*)

$\ker T = \langle s_1(x), s_2(x)\rangle^\perp = \langle x, x^2\rangle^\perp$.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} (r_1, s_1) & (r_2, s_1) \\ (r_1, s_2) & (r_2, s_2) \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 2/3, 2/5$ *autovalori di* $\mathbf{T}$ *con autospazi* $\langle(1,0)\rangle$ *e* $\langle(0,1)\rangle$, *rispettivamente*

$\Rightarrow \sigma(T) = \{0, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}\}$.

$\ker\left(\frac{2}{3}I - T\right) = \langle 1r_1(x) + 0r_2(x)\rangle = \langle r_1(x)\rangle$,

$\ker\left(\frac{2}{5}I - T\right) = \langle 0r_1(x) + 1r_2(x)\rangle = \langle r_2(x)\rangle$.

$$\begin{pmatrix} b_1(\lambda, g) \\ b_2(\lambda, g) \end{pmatrix} = (\lambda I - \mathbf{T})^{-1}\begin{pmatrix} (g, s_1) \\ (g, s_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/(\lambda - \frac{2}{3}) & 0 \\ 0 & 1/(\lambda - \frac{5}{2}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (g, s_1) \\ (g, s_2) \end{pmatrix},$$

$$[(\lambda I - T)^{-1}g](x) = \frac{g(x)}{\lambda} + \frac{x}{\lambda(\lambda - \frac{2}{3})}\int_{-1}^1 g(y)y\,dy + \frac{x^2}{\lambda(\lambda - \frac{5}{2})}\int_{-1}^1 g(y)y^2\,dy.$$

c) $k(x,y) = x - y = r_1(x)\overline{s_1(y)} + r_2(x)\overline{s_2(y)}$

con $r_1(x) = x$, $s_1(x) = r_2(x) = 1$ *e* $s_2(x) = -x$.

$\ker T = \langle s_1(x), s_2(x)\rangle^\perp = \langle 1, x\rangle^\perp$.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} (r_1, s_1) & (r_2, s_1) \\ (r_1, s_2) & (r_2, s_2) \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ -1/3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det(\lambda I - \mathbf{T}) = \lambda^2 - \mathrm{traccia}(\mathbf{T})\lambda + \det\mathbf{T} = \lambda^2 + \frac{1}{12}$

$\Rightarrow -\frac{i}{\sqrt{12}}, \frac{i}{\sqrt{12}}$ *autovalori di* $\mathbf{T}$ *con autospazi* $\left\langle\left(1, \frac{i}{\sqrt{12}} - \frac{1}{2}\right)\right\rangle$ *e* $\left\langle\left(1, -\frac{i}{\sqrt{12}} - \frac{1}{2}\right)\right\rangle$

$\Rightarrow \sigma(T) = \{0, -\frac{i}{\sqrt{12}}, \frac{i}{\sqrt{12}}\}$.

$\ker\left(-\frac{i}{\sqrt{12}}I - T\right) = \left\langle 1r_1(x) + \left(\frac{i}{\sqrt{12}} - \frac{1}{2}\right)r_2(x)\right\rangle = \left\langle x + \frac{i}{\sqrt{12}} - \frac{1}{2}\right\rangle$,

$$\ker\left(\tfrac{i}{\sqrt{12}}I - T\right) = \left\langle 1r_1(x) + \left(-\tfrac{i}{\sqrt{12}} - \tfrac{1}{2}\right)r_2(x)\right\rangle = \left\langle x - \tfrac{i}{\sqrt{12}} - \tfrac{1}{2}\right\rangle.$$

$$\begin{pmatrix} b_1(\lambda,g) \\ b_2(\lambda,g)\end{pmatrix} = (\lambda I - \mathbf{T})^{-1}\begin{pmatrix}(g,s_1)\\(g,s_2)\end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda^2+\frac{1}{12}}\begin{pmatrix}\lambda+\frac{1}{2} & 1\\ -\frac{1}{3} & \lambda-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(g,s_1)\\(g,s_2)\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}&[(\lambda I - T)^{-1}g](x) = \\ &\quad= \frac{g(x)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\big[b_1(g,\lambda)r_1(x) + b_2(g,\lambda)r_2(x)\big]\\ &\quad= \frac{g(x)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda(\lambda^2+\frac{1}{12})}\Big\{\Big[\Big(\lambda+\frac{1}{2}\Big)(g,s_1)+(g,s_2)\Big]x - \frac{1}{3}(g,s_1) + \Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)(g,s_2)\Big\}.\end{aligned}$$

d) $k(x,y) = \sin y = r_1(x)\overline{s_1(y)}$ *con* $r_1(x) = 1,\ s_1(x) = \sin x.$

$(r_1,s_1) = \displaystyle\int_0^{2\pi}\sin y\,dy = 0 \Rightarrow \sigma(T) = \{0\}.$

Si cerca la soluzione di $f(x) - (Tf)(x) = g(x)$ *con* $g(x) = -x$*:*

$(I-T)f = g \iff f - r_1(f,s_1) = g$

$(r_1,s_1) = 0 \Rightarrow (f,s_1) = (f,s_1) - (r_1,s_1)(f,s_1) = (g,s_1)$

$\Rightarrow f = g + r_1(g,s_1),$ *cioè*

$$f(x) = -x - \int_0^{2\pi} y\sin y\,dy = -x - \big(\sin y - y\cos y\big)\Big|_{y=0}^{y=2\pi} = 2\pi - x.$$

(In alternativa, si puó utilizzare la formula per la soluzione $(\lambda I - T)^{-1}g$ *con* $\lambda = 1$ *e* $g(x) = -x$.*)*

Esercizio 4.5. $\lambda - \mu = (\lambda I - T) - (\mu I - T)$

$\Rightarrow R(\lambda,T)(\lambda-\mu) = R(\lambda,T)[(\lambda I - T) - (\mu I - T)] = I - R(\lambda,T)(\mu I - T)$

$\Rightarrow R(\lambda,T)(\lambda-\mu)R(\mu,T) = [I - R(\lambda,T)(\mu I - T)]R(\mu,T) = R(\mu,T) - R(\lambda,T).$

Esercizio 4.6. $\|(\lambda_k I - T) - (\lambda I - T)\| = \|(\lambda_k - \lambda)I\| = |\lambda_k - \lambda| \xrightarrow{k\to+\infty} 0.$

Continuità dell'inversione (Corollario 3.3) $\Rightarrow (\lambda_k I - T)^{-1} \xrightarrow{k\to+\infty} (\lambda I - T)^{-1}.$

Esercizio 4.7. *Teorema spettrale* $\Rightarrow H$ *ammette una base ortonormale* $\{x_1, x_2, x_3\ldots\}$ *di autovettori di* T*. Sia* $Tx_j = \lambda_j x_j$*.*

$0 \leqslant (Tx_j, x_j) = (\lambda_j x_j, x_j) = \lambda_j\|x_j\|^2 = \lambda_j \Rightarrow \lambda_j \geqslant 0$

$\Rightarrow$ *ha senso definire* $Sx := \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}\sqrt{\lambda_j}(x,x_j)x_j, \quad x \in H.$

$$\sum_{j=1}^{+\infty}|\sqrt{\lambda_j}(x,x_j)|^2 \leqslant (\max_j \lambda_j)\sum_{j=1}^{+\infty}|(x,x_j)|^2 \leqslant \|T\|\|x\|^2$$

$\Rightarrow Sx$ *ben definita (serie convergente in* H*) e* $\|Sx\|^2 \leqslant \|T\|\|x\|^2 \quad \forall\, x \in H$

$\Rightarrow S \in \mathscr{L}(H)$ *e* $\|S\| \leqslant \|T\|^{1/2}$.

$(Sx, x_k) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_j}(x, x_j)(x_j, x_k) = \sqrt{\lambda_k}(x, x_k) \quad \forall\ k$

$\Rightarrow S(Sx) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_j}(Sx, x_j)x_j = \sum_{j=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_j}\sqrt{\lambda_j}(x, x_j)x_j = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j(x, x_j)x_j = Tx.$

Esercizio 4.8. *Definiamo* $Sy = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_j}(y, x_j)x_j, \quad y \in H.$

$0 \in \sigma(T) \Rightarrow \lambda \neq 0.$

$\sigma(T)$ *ha nessun punto di accumulazione oppure* 0 *è l'unico punto di accumulazione.*

$\Rightarrow M := \sup_j \left|\frac{1}{\lambda - \lambda_j}\right| < +\infty$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{\lambda - \lambda_j}(y, x_j)\right|^2 \leqslant M^2 \sum_{j=1}^{+\infty} |(y, x_j)|^2 = M^2\|y\|^2$

$\Rightarrow$ *La serie converge in* H *per ogni* $y \in H$ *e* $\|Sy\| \leqslant M\|y\|$.

$\Rightarrow S \in \mathscr{L}(H)$ *e* $TSy = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_j}(y, x_j)Tx_j = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\lambda_j}{\lambda - \lambda_j}(y, x_j)x_j$

$\Rightarrow (\lambda I - T)Sy = \lambda Sy - TSy = \sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda - \lambda_j} - \frac{\lambda_j}{\lambda - \lambda_j}\right)(y, x_j)x_j = \sum_{j=1}^{+\infty}(y, x_j)x_j = y \quad \forall\ y \in H.$

$\Rightarrow (\lambda I - T)S = I.$

Analogamente $S(\lambda I - T) = I$.

La seconda formula segue immediatamente dal fatto che $\frac{1}{\lambda - \lambda_j} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\frac{\lambda_j}{\lambda - \lambda_j}$.

Esercizio 4.9. *Utilizzando le notazioni dell'Esercizio* 2.4*, scegliendo, come é possibile, la base data da* $f_{ij}(t, s) = e_i(t)\,\overline{e_j(s)}$, $i, j = 1, 2, \ldots,$ *si ha* $\|k\|^2_{L^2(A\times A)} = \sum_{i,j=1}^{+\infty} |(k, f_{ij})|^2$.

Dato che

$$\begin{aligned}(k, f_{ij}) &= \iint k(t, s)\overline{f_{ij}(t, s)}\, dtds = \iint k(t, s)\overline{e_i(t)}e_j(s)\, dtds \\ &= \int (Ke_j)(t)\overline{e_i(t)}\, dt = \lambda_j \int e_j(t)\overline{e_i(t)}\, dt = \lambda_j(e_j, e_i) = \delta_{ij}\lambda_j,\end{aligned}$$

concludiamo $\sum_{i,j=1}^{+\infty} |(k, f_{ij})|^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j|^2$.

9.5 Capitolo 6

Esercizio 6.1. *Sia* $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

$$f\phi \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow T_f(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} f(x)\phi(x)\,dx$$

Quindi

$$\begin{aligned}(T_f)'(\phi) = -T_f(\phi') &= -\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \ln|x|\phi'(x)\,dx \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0+} \Big((\ln\varepsilon)\phi(-\varepsilon) - (\ln\varepsilon)\phi(\varepsilon) - \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{1}{x}\phi(x)\,dx \Big).\end{aligned}$$

$$|\phi(-\varepsilon) - \phi(\varepsilon)| \leqslant 2\varepsilon \max_{-\varepsilon\leqslant x\leqslant\varepsilon} |\phi'(x)| \leqslant 2\varepsilon\|\phi\|_1 \Rightarrow (\ln\varepsilon)(\phi(-\varepsilon) - \phi(\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

$$\Rightarrow (T_f)'(\phi) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\phi(x)}{x}\,dx = \text{pv-}\frac{1}{x}(\phi).$$

Esercizio 6.2. *a) Disuguaglianza di controllo (Teorema* 6.9) $\Rightarrow$

$$\forall\ K \subset\subset \Omega \quad \exists\ C = C(K) \quad \exists\ j = j(K) \quad \forall_{\substack{\phi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}),\\ \text{supp }\phi\subseteq K}} : \quad |T(\phi)| \leqslant C\|\phi\|_j.$$

$\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow a\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ *e* $\text{supp } a\phi \subseteq \text{supp } \phi \Rightarrow$

$$\forall\ K \subset\subset \Omega \quad \exists\ C = C(K) \quad \exists\ j = j(K) \quad \forall_{\substack{\phi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}),\\ \text{supp }\phi\subseteq K}} : \quad |(aT)(\phi)| \leqslant C\|a\phi\|_j.$$

Osserviamo

$$\begin{aligned}\|a\phi\|_j &= \max_{x\in\mathbb{R},k\leqslant j} |(a\phi)^{(k)}(x)| \leqslant \max_{x\in\mathbb{R},k\leqslant j} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} |a^{(k-i)}(x)||\phi^{(i)}(x)| \\ &\leqslant \max_{x\in K,k\leqslant j} |a^{(k)}(x)|\|\phi\|_j \max_{k\leqslant j} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} = 2^j \max_{x\in K,k\leqslant j} |a^{(k)}(x)|\|\phi\|_j =: D_K\|\phi\|_j.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |(aT)(\phi)| = |T(a\phi)| \leqslant C\|a\phi\|_j \leqslant (CD_K)\|\phi\|_j = \widetilde{C}_K\|\phi\|_j \quad \forall_{\substack{\phi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}),\\ \text{supp }\phi\subseteq K}}.$$

Disuguaglianza di controllo (Teorema 6.9) $\Rightarrow aT \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

b) Sia $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ *arbitrario.*

$$\begin{aligned}(aT)'(\phi) = -(aT)(\phi') = -T(a\phi') &= -T((a\phi)' - a'\phi) \\ &= -T((a\phi)') + T(a'\phi) = T'(a\phi) + T(a'\phi) \\ &= (aT')(\phi) + (a'T)(\phi) = (aT' + a'T)(\phi).\end{aligned}$$

Esercizio 6.3. *Teorema* 6.19 $\Rightarrow (T_f)' = T_{f'} + y(x_0)\delta_{x_0}$

$$\Rightarrow PT_f = b(T_f)' + cT_f = T_{bf'+cf} + \delta_{x_0}$$

$$bf' + cf = \begin{cases} 0 & : x < x_0 \\ by'(x) + cy(x) & : x > x_0 \end{cases} = 0 \Rightarrow PT_f = \delta_{x_0}.$$

Esercizio 6.4. *a)-d) : Si procede come discusso a lezione.*

e) : Si risolvono separatamente $T' - T = \delta$ e $T' - T = \delta_1$. La soluzione cercata è la somma delle due soluzioni.

f) : Analogamente ad e).

g) : Si risolve $T' - T = \delta$. Derivando membro a membro, si osserva che T è la soluzione dell'equazione proposta.

h), i) : Analogamente a g).

Esercizio 6.5. *Sia $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Si ha, per l'ipotesi $T_k \xrightarrow{k\to+\infty} T \Rightarrow T_k(\phi) \xrightarrow{k\to+\infty} T(\phi)$,*

$$(\partial^\alpha T_k)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T_k(\partial^\alpha \phi) \xrightarrow{k\to+\infty} (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \phi) = (\partial^\alpha T)(\phi).$$

Dato che ϕ è arbitraria, concludiamo $\partial^\alpha T_k \xrightarrow{k\to+\infty} \partial^\alpha T$.

Esercizio 6.6. *Ovviamente $S + T$ e αT sono mappe lineari $\mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$.*

Sia $\phi_k \to \phi$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Allora

$$\begin{aligned}(S+T)(\phi_k) &= S(\phi_k) + T(\phi_k) \longrightarrow S(\phi) + T(\phi) = (S+T)(\phi),\\ (\alpha T)(\phi_k) &= \alpha T(\phi_k) \longrightarrow \alpha T(\phi) = (\alpha T)(\phi).\end{aligned}$$

Esercizio 6.7. *Sia $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ con $\operatorname{supp}\phi \subseteq K$.*

Ipotesi $\Rightarrow r^{-1}(K)$ compatto.

$$\Rightarrow |\delta_\gamma(\phi)| = \left| \int_I \phi(r(t)) |r'(t)| \, dt \right| \leqslant \max_{x\in\mathbb{R}^n} |\phi(x)| \int_{r^{-1}(K)} |r'(t)| \, dt =: C_K \|\phi\|_0$$

Disuguaglianza di controllo (Teorema 6.9) $\Rightarrow \delta_\gamma \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Esercizio 6.8. *Sia $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$. Troviamo*

$$\begin{aligned}(\partial_2 T_u)(\phi) &= -T_u(\partial_2\phi) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1,x_2)\,(\partial_2\phi)(x_1,x_2)\,dx_1dx_2\\ &= -\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}(\partial_2\phi)(x_1,x_2)\,dx_2\right]dx_1 = -\int_0^{+\infty}\Big[\phi(x_1,x_2)\Big]_{x_2=-\infty}^{+\infty}dx_1\\ &= 0 \Longrightarrow \partial_2 T_u = 0,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\partial_1 T_u)(\phi) &= -T_u(\partial_1\phi) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1,x_2)\,(\partial_1\phi)(x_1,x_2)\,dx_1dx_2\\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}(\partial_1\phi)(x_1,x_2)\,dx_1\right]dx_2 = -\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\phi(x_1,x_2)\Big]_{x_1=0}^{+\infty}dx_2\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(0,x_2)\,dx_2 \Longrightarrow \partial_1 T_u = \delta_\gamma,\end{aligned}$$

con $\gamma = Ox_2 \equiv \{r\colon I = (-\infty,+\infty) \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto r(t) = (0,t)$ (cfr. Esercizio 6.7).

Esercizio 6.9. *Per* $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ *vale*

$$T_{\overline{f}}(\phi) = \int \overline{f(x)}\phi(x)\,dx = \overline{\int f(x)\overline{\phi(x)}\,dx} = \overline{T_f(\overline{\phi})}.$$

Sia $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. *Definiamo*

$$\overline{T}(\phi) := \overline{T(\overline{\phi})}, \qquad \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

Ovviamente $\overline{T} : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ *lineare.*

Siano $K \subset\subset \mathbb{R}$. *Esistono* $C \geqslant 0$ *e* $k \in \mathbb{N}_0$ *tali che*

$$|T(\phi)| \leqslant C\|\phi\|_k \qquad \forall \,{}_{\operatorname{supp}\phi\subseteq K}^{\phi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}),}.$$

Allora

$$|\overline{T}(\phi)| = \left|\overline{T(\overline{\phi})}\right| = |T(\overline{\phi})| \leqslant C\|\overline{\phi}\|_k = C\|\phi\|_k \qquad \forall \,{}_{\operatorname{supp}\phi\subseteq K}^{\phi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}),}.$$

Disuguaglianza di controllo (Teorema 6.9) $\Rightarrow \overline{T} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Esercizio 6.10. *Sia* $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ *e* $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. *Allora*

$$T_{f\circ g}(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^x)\phi(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(y)\frac{\phi(\ln y)}{y}\,dy = T_f(A(\phi)),$$

dove $[A(\phi)](y) = \phi(\ln y)/y$. *Dato che*

$$[A(\phi)](y) \neq 0 \iff \phi(\ln y) \neq 0 \iff y \in \{e^x \mid x \in \mathbb{R},\ \phi(x) \neq 0\} = \exp\big(\{x \mid \phi(x) \neq 0\}\big),$$

troviamo

$$\operatorname{supp} A(\phi) = \exp(\operatorname{supp}\phi) = g(\operatorname{supp}\phi).$$

$\Rightarrow A : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathscr{D}(\mathbb{R}_+)$ *(ovviamente A lineare).*

Per $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$ *definiamo*

$$T \circ g : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, \qquad \phi \mapsto (T\circ g)(\phi) := T(A(\phi)).$$

$\Rightarrow T \circ g : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ *lineare.*

$K \subset\subset \mathbb{R} \Rightarrow K_g := g(K) \subset\subset \mathbb{R}_+$.

Disuguaglianza di controllo (Teorema 6.9) $\Rightarrow$

$$\exists\, C = C(K_g) = C(K), j = j(K_g) = j(K) \quad \forall \,{}_{\operatorname{supp}\phi\subseteq K}^{\phi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})} : \quad |T(A(\phi))| \leqslant C\|A(\phi)\|_j.$$

Si osserva che

$$\frac{d^k}{dy^k}[A(\phi)](y) = \frac{1}{y^{k+1}}\big[a_{0k}\phi(\ln y) + a_{1k}\phi'(\ln y) + \ldots + a_{kk}\phi^{(k)}(\ln y)\big]$$

con costanti universali a_{ik} *che non dipendono da* ϕ.

$\Rightarrow \exists\, D = D(j) \geqslant 0 \quad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) : \qquad \|A(\phi)\|_j \leqslant D\|\phi\|_j$

$\Rightarrow |(T\circ g)(\phi)| = |T(A(\phi))| \leqslant C\|A(\phi)\|_j \leqslant CD\|\phi\|_j \quad \forall \,{}_{\operatorname{supp}\phi\subseteq K}^{\phi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})}.$

Disuguaglianza di controllo (Teorema 6.9) $\Rightarrow T \circ g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

9.6 Capitolo 7

Esercizio 7.1. *a) Calcoliamo*

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} e^{-ix\xi}e^{-|x|}\,dx = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{0} e^{x(1-i\xi)}\,dx + \int_{0}^{a} e^{-x(1+i\xi)}\,dx\\ &= \lim_{a\to+\infty}\frac{e^{x(1-i\xi)}}{1-i\xi}\Big|_{x=-a}^{x=0} - \frac{e^{-x(1+i\xi)}}{1+i\xi}\Big|_{x=0}^{x=a}\\ &= \frac{1}{1-i\xi}+\frac{1}{1+i\xi} = \frac{2}{(1+i\xi)(1-i\xi)} = \frac{2}{1+\xi^2}.\end{aligned}$$

b) Calcoliamo

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}\,dx \overset{\xi\neq 0}{=} \frac{1}{-i\xi}e^{-ix\xi}\Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{1}{\xi}\frac{e^{-i\xi}-e^{i\xi}}{-i} = \frac{2}{\xi}\frac{e^{i\xi}-e^{-i\xi}}{2i} = 2\frac{\sin\xi}{\xi}, \qquad \widehat{f}(0)=2.$$

Esercizio 7.2. *Detta f la funzione dell'Esercizio 7.1.a), si trova $\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = f(0) = 2$ e $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-1}^{1}\sqrt{2\pi}\,dt = 2\sqrt{2\pi}$. Pertanto, $\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}} = 2 \leqslant 2c\sqrt{2\pi} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}}$ è falsa se $c < (2\pi)^{-1/2}$. Ne segue che la costante che compare nella stima delle norme nell'enunciato del Lemma 7.1 è ottimale.*

Esercizio 7.3. *Si ha $f(x) = G(x_1)\cdot\ldots\cdot G(x_n)$ con $G(t) = e^{-t^2/2}$. Quindi, utilizzando ripetutamente il Teorema di Fubini-Tonelli e il Lemma 7.5,*

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x_1\xi_1+\ldots+x_n\xi_n)}G(x_1)\cdot\ldots\cdot G(x_n)\,dx_1\ldots dx_n\\ &= \left[(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix_1\xi_1}G(x_1)\,dx_1\right]\cdot\ldots\cdot\left[(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix_n\xi_n}G(x_n)\,dx_n\right]\\ &= \widehat{G}(\xi_1)\cdot\ldots\cdot\widehat{G}(\xi_n) = e^{-\xi_1^2/2}\cdot\ldots\cdot e^{-\xi_n^2/2} = e^{-|\xi|^2/2}.\end{aligned}$$

Esercizio 7.4.

- $\hat{v}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-ix\xi}u(x-y)\,dx = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-i(z+y)\xi}u(z)\,dz =$
  $= e^{-iy\xi}(2\pi)^{-n/2}\int e^{-iz\xi}u(z)\,dz = e^{-iy\xi}\hat{u}(\xi);$

- $\hat{v}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-ix\xi}e^{ixy}u(x)\,dx = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-ix(\xi-y)}u(z)\,dz = \hat{u}(\xi-y) =$
  $= (\tau_y\hat{u})(\xi);$

- $\hat{v}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-ix\xi}u(A^{-1}x)\,dx = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-i(Ay)\xi}u(y)|\det A|\,dy =$
  $= |\det A|(2\pi)^{-n/2}\int e^{-iy({}^tA\xi)}u(y)\,dy = |\det A|\,\hat{u}({}^tA\xi);$

- $\hat{v}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-ix\xi}\overline{u}(x)\,dx = \overline{(2\pi)^{-n/2}\int e^{-ix(-\xi)}u(x)\,dx} = \overline{\hat{u}(-\xi)} \Leftrightarrow \widehat{\overline{u}} = \overline{\check{\hat{u}}};$

- *con una matrice* $n \times n$ *ortogonale* $A \Rightarrow {}^tA = A^{-1} \Rightarrow |\det A| = 1$, *ricordando che* $u(Ax) = u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, *troviamo*
  $\widehat{u}(A\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-ix(A\xi)}u(x)\,dx = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-i({}^tAx)\xi}u(x)\,dx =$
  $= (2\pi)^{-n/2}\int e^{-i(A^{-1}x)\xi}u(x)\,dx = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-iy\xi}u(Ay)|\det A|\,dy =$
  $= (2\pi)^{-n/2}\int e^{-ix\xi}u(x)\,dx = \widehat{u}(\xi)$,
  ovvero, $\widehat{u}$ *è radiale.*

Esercizio 7.5. *Siccome* $e^{-ix\xi} = e^{-i(x-y)\xi}e^{-iy\xi}$, *utilizzando il teorema di Fubini-Tonelli ed un cambio di variabili (lineare), si ha*

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2}\int e^{-ix\xi}\Big(\int f(x-y)g(y)\,dy\Big)\,dx\\ &= (2\pi)^{-n/2}\int e^{-iy\xi}g(y)\Big(\int e^{-i(x-y)\xi}f(x-y)\,dx\Big)\,dy\\ &= (2\pi)^{n/2}\,(2\pi)^{-n/2}\int e^{-iy\xi}g(y)\Big[(2\pi)^{-n/2}\int e^{-iz\xi}f(z)\,dz\Big]\,dy = (2\pi)^{n/2}\widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{g}(\xi).\end{aligned}$$

Utilizzando il teorema di Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}\int \widehat{f}(\xi)g(\xi)\,d\xi &= \int\Big[(2\pi)^{-n/2}\int e^{-ix\xi}f(x)\,dx\Big]g(\xi)\,d\xi\\ &= \int\Big[(2\pi)^{-n/2}\int e^{-i\xi x}g(\xi)\,d\xi\Big]f(x)\,dx = \int \widehat{g}(x)f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Esercizio 7.6. *Utilizzando l'integrazione per parti, troviamo:*

$$\begin{aligned}\widehat{\partial_{x_j}\varphi}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2}\int e^{-ix\xi}(\partial_{x_j}\varphi)(x)\,dx = -(2\pi)^{-n/2}\int\big(\partial_{x_j}e^{-ix\xi}\big)\varphi(x)\,dx\\ &= i\xi_j(2\pi)^{-n/2}\int e^{-ix\xi}\varphi(x)\,dx = i\xi_j\widehat{\varphi}(\xi),\\ \partial_{\xi_j}\widehat{\varphi}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2}\partial_{\xi_j}\int e^{-ix\xi}\varphi(x)\,dx = (2\pi)^{-n/2}\int\big(\partial_{\xi_j}e^{-ix\xi}\big)\varphi(x)\,dx\\ &= -(2\pi)^{-n/2}\int e^{-ix\xi}ix_j\varphi(x)\,dx = -\widehat{ix_j\varphi}(\xi).\end{aligned}$$

Esercizio 7.7. *a) Sia* f *la funzione dell'Esercizio* 7.1.*a). Grazie al Teorema di Plancherel, si ha*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^2} &= \frac{1}{4}\|\widehat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{4}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi e^{-2|x|}\,dx\\ &= \frac{\pi}{2}\bigg(\int_{-\infty}^{0}e^{-2|x|}\,dx + \int_0^{+\infty}e^{-2|x|}\,dx\bigg) = \pi\int_0^{+\infty}e^{-2x}\,dx = \pi\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

b) Sia f la funzione dell'Esercizio 7.1.b). Grazie al Teorema di Plancherel, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2}\, d\xi = \frac{1}{4}\|\widehat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{4}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} 2\pi\, dx = \pi.$$

Esercizio 7.8. *Posto $x_1 = \rho\cos\theta\cos\varphi$, $x_2 = \rho\cos\theta\sin\varphi$, $x_3 = \rho\sin\theta$, $\rho \in [0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, si ha $dx = dx_1dx_2dx_3 = \rho^2\cos\theta\, d\rho d\varphi d\theta$ e*

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} |u| = \iiint_{B_1(0)} |x|^\alpha\, dx = \int_{\rho=0}^{1}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^\alpha\rho^2\cos\theta\, d\rho d\varphi d\theta = 4\pi \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{\rho^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right]_{\rho=a}^{1}$$
$$= \frac{4\pi}{\alpha+3}(1 - \underbrace{\lim_{a\to 0^+} a^{\alpha+3}}_{=0\Leftarrow\alpha+3>0}) = \frac{4\pi}{\alpha+3} < +\infty,$$

quindi $u \in L^1(\mathbb{R}^3)$, come affermato. Dall'Esercizio 7.4, dato che u è radiale, segue che $\widehat{u}$ è radiale. Dunque, denotata con (e_1, e_2, e_3) la base canonica di $\mathbb{R}^3$, usando coordinate polari sferiche come sopra, troviamo, per $\xi \neq 0$,

$$\widehat{u}(\xi) = u(|\xi|e_3) = (2\pi)^{-3/2}\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-i|\xi|xe_3}u(x)\, dx = (2\pi)^{-3/2}\iiint_{B_1(0)} e^{-i|\xi|x_3}|x|^\alpha\, dx$$
$$= (2\pi)^{-3/2}\int_{\rho=0}^{1}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-i|\xi|\rho\sin\theta}\rho^\alpha\rho^2\cos\theta\, d\rho d\varphi d\theta$$
$$= (2\pi)^{-1/2}\int_{\rho=0}^{1}\left[\frac{e^{-i|\xi|\rho\sin\theta}}{-i|\xi|}\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\rho^{\alpha+1}\, d\rho = 2(2\pi)^{-1/2}|\xi|^{-1}\int_{\rho=0}^{1}\frac{e^{i\rho|\xi|} - e^{-i\rho|\xi|}}{2i}\rho^{\alpha+1}\, d\rho$$
$$= 2(2\pi)^{-1/2}|\xi|^{-1}\int_{\rho=0}^{1}\rho^{\alpha+1}\sin(\rho|\xi|)\, d\rho = 2(2\pi)^{-1/2}|\xi|^{-\alpha-3}\int_0^{|\xi|} t^{\alpha+1}\sin t\, dt.$$

Osserviamo che l'integrale ottenuto nell'ultimo passaggio è convergente, dato che $t^{\alpha+1}\sin t \sim t^{\alpha+2}$, $t \to 0^+$ e $\alpha + 2 > -1$. Abbiamo quindi, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^3$, $\xi \neq 0$,

$$\widehat{u}(\xi) = \widehat{u}(|\xi|) = 2(2\pi)^{-1/2}|\xi|^{-\alpha-3}\int_0^{|\xi|} t^{\alpha+1}\sin t\, dt.$$