

SCHEMI, 25/26, L2, 25/9/2025

- per ogni anello R (= comm., con 1)
abbiamo definito uno spazio topologico:

$$X = \text{Spec } R$$

come insieme: $\text{Spec } R = \{[\mathcal{P}] \mid \mathcal{P} \subset R \text{ ideale primo}\}$

con la topologia di Zariski,

$$\text{chiusi} \doteq V(I) = \{[\mathcal{P}] \in \text{Spec } R \mid I \subseteq \mathcal{P}\}$$

$I \subseteq R$ ideale

(pensare a ideali massimali)

$$X_f = X \setminus V(f) \quad \text{aperto di } X,$$

detto APERTO PRINCIPALE
 $\forall f \in R$

$\{X_f\}_{f \in R}$ base per la top. di Zariski

Prop. X è compatto.

[Dim.] Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto di X .
 $\forall \alpha$ possiamo scrivere U_α come unione di aperti principali $\Rightarrow$ otteniamo un raffinamento del ricoprime. $\mathcal{U}$ dato da aperti principali;

$$\mathcal{V} = \{X_{f_\beta}\}_{\beta \in B} \quad \leadsto \quad X = \bigcup_{\beta} X_{f_\beta}$$

$$\forall \beta \quad \exists \alpha \text{ t.c. } X_{f_\beta} \subseteq U_\alpha$$

Abbiamo: $\bigcap_{\beta} V(f_\beta) = \emptyset \Rightarrow \nexists \mathcal{P} \subset R$ ideale primo
t.c. $\mathcal{P}$ contiene tutti gli f

$\Rightarrow$ l'ideale $I = (f_p)_p$ non può essere proprio
 (altrimenti sarebbe contenuto in un ideale massimale)

$$\Rightarrow I = R \Rightarrow 1 \in (f_p)_p \Rightarrow 1 = a_1 f_{p_1} + \dots + a_n f_{p_n}$$

$$\Rightarrow (f_1, \dots, f_n) = R \quad \text{con } f_i \in (f_p)$$

$$a_i \in R$$

$$\Rightarrow V(f_1) \cap \dots \cap V(f_n) = \emptyset$$

$$\Rightarrow X = X_{f_1} \cup \dots \cup X_{f_n}$$



$$\text{ma: } \forall f_i \exists d_i \text{ t.c. } X_{f_i} \subseteq U_{d_i}$$

$$\Rightarrow X = U_{d_1} \cup \dots \cup U_{d_n}$$

Fascio strutturale

Vogliamo definire un fascio di anelli

$$\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\text{nulla}} \text{ spazio top. } X = \text{Spec } R$$

lo scheme affine sono date dalle coppie:
 spazio top. + fascio di anelli $\sim (X, \mathcal{O}_X)$

• il fascio è completamente determinato
 dall'anello R

$$\bullet \text{ anello: } \mathcal{O}_X(X) = R$$

$$\mathcal{O}_X(X_f) = R_f$$

localizzazione

$$\forall \mathfrak{p} \in X$$

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}}$$

(Spiga)

localizzazione
 nel punto $\mathfrak{p}$

"rispetto all'insieme
 multiplicità"

(ricordiamo che vediamo
 f come "funzioni" su $\text{Spec } R$, dove

$$\bar{f}(\mathfrak{p}) = f \bmod \mathfrak{p} \in \frac{R}{\mathfrak{p}} \hookrightarrow \text{Spec} \left(\frac{R}{\mathfrak{p}} \right)$$

$k(\mathfrak{p})$

$$S = R \setminus \mathfrak{p}$$

(*) Consideriamo un aperto principale

$$X_f \subset X = \text{Spec } R, \quad f \in R.$$

Abbiamo visto che c'è una con. biunivoca, che preserva le inclusioni:

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \text{primi di } R \text{ che} \\ \text{non contengono } f \end{array} \right\} & \xleftrightarrow{1:1} & \left\{ \begin{array}{l} \text{primi di } R_f \\ \parallel \text{ insieme} \\ \text{Spec } R_f \end{array} \right\} \\ \parallel \text{ insieme} & & \\ X_f & & \end{array}$$

Oss. anche che la topologia di Zariski di $\text{Spec } R_f$ coincide con la top. ~~di~~ indotta di X_f da X , cioè che la con. 1:1 è anche omeomorfismo.

Infatti: Consideriamo un chiuso $V(I) \subset X$; tale in X_f il chiuso

$$V(I) \cap X_f = \{ [\mathcal{P}] \in X \mid \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}, f \notin \mathcal{P} \}$$

Sic $I^e \subset R_f$ è ideale generato da $\psi(I)$
 $\psi: R \rightarrow R_f$

allora:

$$[\mathcal{P}] \in V(I) \cap X_f$$

$$\Rightarrow I^e \subseteq \mathcal{P}^e \Rightarrow [\mathcal{P}^e] \in V(I^e) \subset \text{Spec } R$$

e viceversa se $I^e \subseteq \mathcal{P}^e$ allora

$$I \subseteq (I^e)^c = \psi^{-1}(I^e) \subseteq \psi^{-1}(\mathcal{P}^e) = \mathcal{P}$$

$$\Rightarrow [\mathcal{P}] \in V(I) \cap X_f$$

$$\Rightarrow V(I) \cap X_f \stackrel{\text{tramite la con. 1:1}}{=} V(I^e) \subset \text{Spec } R_f$$

Viceversa: se $J \subset R_f$ un ideale - allora

$$J = (J^c)^e, \quad J^c \subset R \text{ ideale}$$

$$\Rightarrow V(J) = V(J^c) \cap X_f \quad \underline{\text{su}}.$$

~~Da~~

Infine osserviamo che:

• gli aperti principali di $\text{Spec } R_f$ sono esattamente gli aperti principali di X contenuti in X_f . Infatti:

se $X_g \subset X_f$, allora $X_g = X_g \cap X_f = X_{fg}$

$$\leadsto X_{fg}'' = \{ [P] \in X \mid f \notin P \text{ e } g \notin P \}$$

$\leadsto \uparrow g \notin P'$ in R_f quando vediamo $g \in R_f$.

$$\{ [P'] \in \text{Spec } R_f \mid \frac{g}{f} \notin P' \} \quad \psi(g) = \frac{g}{f}.$$

$\leadsto$ gli aperti principali di $\text{Spec } R$ saranno a loro volta schemi affini, associati agli ideali R_f .

Inducibilità

• si tratta di una proprietà puramente Topologica:

Def Uno spazio topologico X ^(non $\emptyset$) è IRRIDUCIBILE se ~~non~~ non è unione di due chiusi propri, altrimenti diciamo che X è REDUCIBILE.

(equivalentemente: X è indivisibile se $\forall U, V$ aperti non $\emptyset$ si ha $U \cap V \neq \emptyset$).

$\leadsto$ ogni aperto non $\emptyset$ è chiuso

ES Se $Z \subset X$ è un sottospatto, allora Z è ind. $\Leftrightarrow \bar{Z}$ è ind.

~~Def Una COMPONENTE IRRIDUCIBILE di X è un sottospatto indivisibile (cioè topologico), massimale (rispetto all'inclusione).~~

~~OSS Abbiamo due mappe:~~

~~$$V: \{ \text{ideali di } R \} \rightarrow \{ \text{chiusi di } X \}$$
$$I \mapsto V(I)$$~~

OSS Se R è un dominio, allora $\text{Spec } R$ è indivisibile.

[Dim.] Sia $X = V(I) \cup V(J)$ con I, J chiusi propri. Allora $V(I) \neq X \Rightarrow I \neq (0)$
e allo stesso modo $\Rightarrow \exists f \in I, f \notin J$
 $\exists g \in J, g \notin I$

$\forall P \subset R$ primo abbiamo $[P] \in V(I)$, cioè $P \supset I$
oppure $[P] \in V(J)$, cioè $P \supset J$
 $\Rightarrow$ in ogni caso: $f \cdot g \in P$

Die R ablesung $\Rightarrow N_R = (0) \Rightarrow f_g = 0 \quad \checkmark$.

- So $x = [\mathcal{P}] \in X = \text{Spec } R$.

Since $x = [\mathbb{P}]$ is pto glenari. Above:

Tipico: si assume $x \in V(P) \Rightarrow \overline{xy} \subseteq V(P)$.
 Viceversa se $V(I)$ è un disco contenente x ,
 allora $I \subseteq P \Rightarrow V(I) \supseteq V(P)$.

Oss Sia $I \subset R$ un ideale. Abbiamo una
con. biiunivoca: $\mathcal{P}(\frac{R}{I}) \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(\emptyset) \quad \pi: R \rightarrow \frac{R}{I}$

$$\begin{array}{ccc} \{ \text{'ideali primi di } \frac{R}{I} \} & \xleftrightarrow{1:1} & \{ \text{'ideali di } \frac{R}{I} \} \\ \parallel \text{ insieme} & & \parallel \text{ insieme} \\ \text{Spec } \frac{R}{I} & & V(I) \end{array}$$

Mostriamo che: punto con. immagine e
 anche immagine
 no possiamo identificare $V(I)$ come spazio
 topol. con $\text{Spec } \frac{R}{I}$.
 (e anche ancora uno schema affine).

Teorema:

Se $J \subset \frac{R}{I}$ ideale, allora

$\pi^{-1}(J)$ è un ideale contenuto in I
 $\Rightarrow V(\pi^{-1}(J)) \subseteq V(I)$ e
 compatto esattamente a $V_{\text{Spec } \frac{R}{I}}(J)$.

inverso:

se $H \subset R$ è un ideale, allora

$$V(H) \cap V(I) = V(\underbrace{H \cup I}_{\text{insieme}}) = V(\underbrace{H+I}_{\text{ideale contenuto in } I})$$

è $V(H+I)$
 con. a $V(H')$.

$$\Rightarrow H+I = \pi^{-1}(H')$$

$H' \subset \frac{R}{I}$ ideale

Sia ora $\pi = [\mathcal{P}] \in \text{Spec } R$, allora

$$\overline{\pi} = V(\mathcal{P}) \cong \text{Spec } \frac{R}{\mathcal{P}}$$

è un chiuso
 irriducibile
 di X
 (anche "punto"
 chiuso di
 un ind.)

Mostriamo che π è

il punto generico di $V(\mathcal{P})$.

Vicinanze: sia $Y \subset X$ un chiuso irreducibile
 abbiamo $Y = V(I)$ con I ideale. Siano

$$V(I) = \overline{V(\sqrt{I})} \quad (\text{perché?}) \quad (\text{cf esempio})$$

presume suppone I radicale -

Mostriamo che in effetti I è primo.

Siano $f, g \in R + c$. $f \cdot g \in I$. Consideriamo

$$Z = V(I + (f)) \quad \text{e} \quad W = V(I + (g)),$$

Z e W sono chiusi contenuti in Y .

Inoltre $\forall [P] \in Y$ si ha

$$f \cdot g \in I \subset P \quad \text{primo}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f \in P \Rightarrow I + (f) \subset P \Rightarrow x \in Z \\ g \in P \Rightarrow x \in W \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z \cup W = Y \quad \text{ind.} \Rightarrow \text{presume}$$

$$\text{suppone} \quad Z = Y \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{I + (f)} = \sqrt{I} = I$$

$$\text{cioè } f \in I. \quad \text{---}$$

Dunque I è primo e se $y_0 := [I] \in Y$,
abbiamo $Y = \overline{y_0}$.

Abbiamo quindi una corrispondenza
biunivoca:

$$\{ \text{punti di } X \} \longleftrightarrow \{ \text{chiusi ind. di } X \}$$

(che si specializza sui punti)
chiusi

In particolare: X è ind. $\Leftrightarrow N_A$ è primo,
in tal caso $x_0 := [N_A] \in X$ è il punto
CENTRICO di X , e $\overline{x_0} = X$.

Prop R noetheriana $\Rightarrow X$ si scrive come
unione finita dei chiusi ind. massimali, e
sui componenti irriducibili (corrispondono a: i punti
minimali di R).

ESEMP:

1) $\text{Spec } k = \{(0)\}$ un punto.

2) $A_k^n := \text{Spec } k[x_1, \dots, x_n]$

(più in generale $\forall R$:

$$A_R^n := \text{Spec } R[x_1, \dots, x_n]).$$

$A_{\mathbb{C}}^1 = \text{Spec } \mathbb{C}[x]$ ha come punti:

gli ideali massimali $(x-a) \leftrightarrow a \in \mathbb{C}$ pt. chiusi
l'ideale (0) pto generico (denso).

$A_{\mathbb{C}}^2 = \text{Spec } \mathbb{C}[x, y]$ ha come punti:

- gli ideali massimali $(x-a, y-b) \leftrightarrow (a, b)$ pt. chiusi
- gli ideali $(f(x, y))$ con f irrid. $\leadsto$ pt. generici delle curve irrid.
- (0) pto generico.

Per ogni varietà affine $X \subset A_k^n$ con k algebricamente chiuso, $\text{Spec } k[X]$ ha:

- un pto chiuso per ogni pto di X
- + un pto per ogni chiuso irrid. di X (denso).

ES. 3 $A_{\mathbb{R}}^1 = \text{Spec } \mathbb{R}[x]$

- Avremo: i punti chiusi ('ideali' massimali) più il pto generico (0).

A caso due tipi di ideali massimali (sono generati da un pol. irriducibile):
 $(x-a)$, $a \in \mathbb{R}$ ($\Leftrightarrow$ pti "usuali" delle rette reali)

(x^2+ax+b) , $\Delta < 0$

Corrispondono a due punti complessi coniugati $z, \bar{z}$ in $A_{\mathbb{C}}^1$

cioè a un'orbita dell'azione del gruppo di Galois (coniugio) nella chiusura algebrica

ES. 4 $\text{Spec } \mathbb{Z}$ ha

- pti chiusi: (p) con p primo
 - pto generico: (0)
- nona pensato come una "curva" discreta

Se $n \in \mathbb{Z}$, la "funzione" definita da n vale:

$$n \bmod p \text{ in } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad n(p)$$

$$n \in \mathbb{Q} \quad \text{in } (0).$$

• Osservazione preliminare in localizzazione:

• $S \subset R$ insieme moltiplicativo
(contiene 1, chiuso per mult.)

$\leadsto R_S = S^{-1}R \leftarrow$ frazioni $\frac{r}{s}$ calcolabile:

$$\frac{r_1}{s_1} = \frac{r_2}{s_2} \text{ se } \exists t \in S \text{ t.c.}$$

$$t(s_2 r_1 - s_1 r_2) = 0$$

Se R è un dominio:

$$R \subset R_S \subset \text{Frac}(R)$$

Ci interessano soprattutto i casi:

$$\begin{aligned} &\rightarrow S = \{p^n \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\} \\ &\leadsto R_f \\ &\rightarrow S = R \setminus \mathfrak{P}, \mathfrak{P} \text{ primo} \end{aligned}$$

Dato S moltiplicativo, possiamo considerare

$$\leadsto R_{\mathfrak{P}}$$

$$\text{Sat}(S) = \{a \in R \mid a \text{ divide qualche elemento di } S\}$$

(saturazione di S)

• $S \subset \text{Sat}(S) \stackrel{p}{=} S'$, S' è ancora moltiplicativo, e
in che un iso canonico:

$$R_S \rightarrow R_{S'}$$

$$\frac{r}{s} \mapsto \frac{r}{s}$$

(verificare i dettagli
per esercizio - di fatto
se $s' \in S'$

$$\exists t \in S \text{ t.c. } 0 = a \cdot s'$$

$$\Rightarrow \frac{r}{s'} = \frac{a r}{a s'} = \frac{a r}{s})$$

~~Consideriamo ora un
aperto principale $U \subset \text{Spec } R = X$.~~

~~Allora $U = X_f$ con $f \in R$~~

Inoltre: se $S_1 \subset S_2$ insiemi mult., abbiamo
• φ è ben definito:

$$\varphi: R_{S_1} \rightarrow R_{S_2} \text{ dato}$$

$$\frac{r}{s} \mapsto \frac{r}{s} \quad (s \in S_1)$$

$$\text{se } \frac{r}{s} \sim_{S_1} 0, \exists t \in S_1 \text{ t.c. } t r = 0$$

$$\Rightarrow \frac{r}{s} \sim_{S_2} 0.$$

$$\underline{\text{OSS 1}} \quad X_f \supseteq X_g \iff g \in \sqrt{(f)}.$$

[Dir] In generale si ha:

$$\sqrt{I} = \bigcap_{I \subseteq P} P$$

$$X_f \supseteq X_g \iff V(f) \subseteq V(g) \iff \text{ogni primo che contiene } f \text{ contiene anche } g$$

" $\{P\} / f \in P$

$$g \in \bigcap_{f \in P} P = \sqrt{(f)}.$$

~~Questo ci permette di definire un~~
~~omomorfismo~~ :) NON VERE?

$$\underline{\text{OSS 2}} \quad X_f = X_g \iff \sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$$

$$\iff \text{Sat} \{f^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} = \text{Sat} \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

[Dir] Sia $a \in \text{Sat} \{f^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ no a divide f^m
 per qualche $m \Rightarrow \exists b \in R$ t.c. $ab = f^m$

Re: $g \in \sqrt{(f)} \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ t.c. $g^m \in (f)$, cioè

$$g^m = f \cdot h \Rightarrow abh^m = f^m h^m = g^{m+m}$$

$$\Rightarrow a \in \text{Sat} \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

(questo mostra: $X_f \supseteq X_g \Rightarrow \text{Sat} \{f^n\} \subseteq \text{Sat} \{g^n\}$)

viceversa: se $\text{Sat} \{f^n\} \subseteq \text{Sat} \{g^n\}$, in particolare $f \in \text{Sat} \{g^n\}$

$$\Rightarrow \exists g^n = f \cdot h \text{ per qualche } n \Rightarrow g^n \in (f) \Rightarrow g \in \sqrt{(f)}.$$

(e quindi: $X_f \supseteq X_g \iff \text{Sat} \{f^n\} \subseteq \text{Sat} \{g^n\}$).