FOGLIO DI ESERCIZI I

CINZIA CASAGRANDE E KARL CHRIST

Esercizio 1.1. Descrivere $\mathrm{Spec}(R)$ nei seguenti casi:

(1) $R = \mathbb{Z}[x]$;
(2) $R = \mathbb{C}[x]/(x^2)$;
(3) $R = \mathbb{Z}/(3)$;
(4) $R = \mathbb{Z}_{(3)}$.

Esercizio 1.2. Dimostrare che se R è un anello noetheriano, allora ogni sottoinsieme di $\mathrm{Spec}(R)$ è compatto.

Esercizio 1.3. Dimostrare che $\mathrm{Spec}(R)$ è uno spazio topologico T_0 (c'è, per due punti distinti $x, y \in \mathrm{Spec}(R)$ esiste un intorno aperto di x che non contiene y o vice versa).

Esercizio 1.4. Sia $S \subset R$ moltiplicativamente chiuso. Dimostrare che gli ideali primi di $S^{-1}R$ sono in corrispondenza biunica con quelli di R che non intersecano S.

Esercizio 1.5. Mostrare che $\mathrm{Spec}(R)$ è irriducibile se e solo se il nilradicale N_R di R è un ideale primo. In tal caso il punto $[N_R]$ è il punto generico di $\mathrm{Spec}(R)$.

Esercizio 1.6. Mostrare che se $I \subset J$ sono due ideali di R, allora si ha $V(I) \supset V(J)$ in $\mathrm{Spec}(R)$.

Esercizio 1.7. Mostrare che se I e J sono due ideali di R, si ha $V(I) = V(J)$ se e solo se $\sqrt{I} = \sqrt{J}$. Dedurre che $V(I) = V(\sqrt{I})$.

Esercizio 1.8. Mostrare che se R è un anello noetheriano, $\mathrm{Spec}(R)$ si scrive come unione finita di chiusi irriducibili.

Esercizio 1.9. Sia X uno spazio topologico. Mostrare che sono equivalenti:

(i) X è irriducibile
(ii) per ogni U, V aperti non vuoti di X si ha $U \cap V \neq \emptyset$
(iii) ogni sottoinsieme aperto, non vuoto di X è denso.

Esercizio 1.10. Sia X uno spazio topologico e Z un sottospazio. Mostrare che Z è irriducibile se e solo se la sua chiusura $\overline{Z}$ è irriducibile.