OSS 1 $X_f \supseteq X_g \iff g \in V(f) \iff \exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $g^n = f \cdot h$
$\iff g \in \mathrm{Sat}\{f^n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$
$\iff \mathrm{Sat}\{f^n\}_n \supseteq \mathrm{Sat}\{g^n\}_n$:

$\boxed{\text{DIM}}$ In generale si ha:
$$\sqrt{I} = \bigcap_{I \subseteq P} P$$

$X_f \supseteq X_g \iff V(f) \subseteq V(g) \iff$ ogni primo che contiene f contiene anche g

$V(f) = \{[P] \mid f \in P\}$

$$\Updownarrow$$

$$g \in \bigcap_{f \in P} P = \sqrt{(f)}.$$

~~Questo ci permette di definire un omomorfismo~~ :

$\boxed{\text{NON SERVE}}$

OSS 2 $X_f = X_g \iff \sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$
$\iff \mathrm{Sat}\{f^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} = \mathrm{Sat}\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$.

$\boxed{\text{DIM}}$
Sia $a \in \mathrm{Sat}\{f^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ cioè a divide f^n per qualche $n \Rightarrow \exists b \in R$ t.c. $ab = f^n$

Ora: $g \in \sqrt{(f)} \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ t.c. $g^m \in (f)$, cioè

$$g^m = f \cdot h \Rightarrow ab h^n = f^n h^n = g^{mn}$$

$\Rightarrow a \in \mathrm{Sat}\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ (
(questo mostra: $X_f \supseteq X_g \Rightarrow \mathrm{Sat}\{f^n\} \subset \mathrm{Sat}\{g^n\}$)

Viceversa: se $\mathrm{Sat}\{f^n\} \subset \mathrm{Sat}\{g^n\}$, in particolare $f \in \mathrm{Sat}\{g^n\}$
$\Rightarrow g^n = f \cdot h$ per qualche $n \Rightarrow g^n \in (f) \Rightarrow g \in \sqrt{(f)}$.

(e quindi: $X_f \supseteq X_g \iff \mathrm{Sat}\{f^n\} \subset \mathrm{Sat}\{g^n\}$).

Fascio strutturale.

Vogliamo definire un fascio di anelli

$\mathcal{O}_X = \mathcal{O}$ nello spazio top. $X = \operatorname{Spec} R$.

Lo schema affine sarà dato dalle coppie:

spazio top. + fascio di anelli $\rightsquigarrow (X, \mathcal{O}_X)$.

- il fascio è completamente determinato dall'anello R
- avremo: $\mathcal{O}_X(X) = R$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow f=1$

$\mathcal{O}_X(X_f) = R_f$ localizzazione

e $\forall\, \mathfrak{p} \in X \qquad \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}} \leftarrow$ localizzazione nel primo $\mathfrak{p}$

(Spighe).

$\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\shortparallel$ rispetto all'insieme moltiplicativo $S = R \setminus \mathfrak{p}$.

(ricordiamo che: vediamo f come "funzioni" su $\operatorname{Spec} R$, dove

$\bar{f}([\mathfrak{p}]) = f \bmod \mathfrak{p} \in \frac{R}{\mathfrak{p}} \overset{\text{dominio}}{\hookrightarrow} \underbrace{\operatorname{Frac}\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)}_{k(x)}$)

il fascio $\mathcal{O}$ allora è completamente determinato dall'assegnazione sugli aperti principali: vediamo come.

<u>Prop</u> Sia X uno spazio topologico e $\mathcal{B}$ una base di aperti. Supponiamo di avere il dato di:

- una collezione $\mathcal{F}(U)$ di anelli (o ...) $\forall U \in \mathcal{B}$
- $\forall U, V \in \mathcal{B}$ con $V \subseteq U$, degli omom.
$$\rho^U_V : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$$

che soddisfano le proprietà:
$$\rho^U_U = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(U)}, \quad \rho^V_W \circ \rho^U_V = \rho^U_W$$
$W \subseteq V \subseteq U$ in $\mathcal{B}$.

Supponiamo inoltre che siano verificate le "proprietà di fascio" relativamente agli aperti di $\mathcal{B}$, cioè:

$\forall U \in \mathcal{B}$, $\forall$ ricopr. aperto $U = \{U_i\}_{i \in I}$ con $U_i \in \mathcal{B}$, e $\forall$ collezione $\{f_i\}_{i \in I}$ $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$

$\forall i, j$, $\forall V \in \mathcal{B}$ con $V \subseteq U_i \cap U_j$, si abbia
$$\rho^{U_i}_V (f_i) = \rho^{U_j}_V (f_j) \quad \text{in } \mathcal{F}(V)$$

(NB se la base $\mathcal{B}$ è chiusa per intersezioni, basta prendere $V = U_i \cap U_j$).

allora: $\exists!\ f \in \mathcal{F}(U)$ t.c. $f_{|U_i} = f_i$ in $\mathcal{F}(U_i)$ $\forall i \in I$.

Allora: $\mathcal{F}$ si estende in modo unico ad un fascio $\mathcal{F}$ su X.

Allo stesso modo: un morfismo di fasci su X è univocam. determinato una volta assegnato

sugli aperti di una base.
Di fatto come si definisce $\mathcal{F}(U)$ per U arbitrario
→ come limite inverso:

$$\mathcal{F}(U) = \varprojlim_{V\subset U,\, V\in\mathcal{B}} \mathcal{F}(V) =$$

$$= \left\{ \{f_V\}_{V\subset U,\, V\in\mathcal{B}} \in \prod_{V\in U,\, V\in\mathcal{B}} \mathcal{F}(V) \;\middle|\; f_{V|W} = f_W \;\; \forall\, \underbrace{W \subset V}_{\in\mathcal{B}} \subset U \right\}$$

→ tramite le spighe: possiamo costruire le spighe $\mathcal{F}_x$ usando gli aperti della base, e poi

$$\mathcal{F}(U) = \{ s : U \to \coprod_{x\in U} \mathcal{F}_x \mid s(x)\in\mathcal{F}_x \;\; \forall x\in U$$

e: $\forall x \in U \;\; \exists V\in\mathcal{B}$, $x\in V\subseteq U$, $\exists f_V \in \mathcal{F}(V)$, t.c. $s(y) = [f_V]_y \in \mathcal{F}_y \;\; \forall y\in V \}$.

Torniamo agli schemi affini: $X = \operatorname{Spec} R$.
Sia $U\subset X$ un aperto principale, vogliamo definire $\mathcal{O}(U)$. Poniamo:

$$\boxed{\mathcal{O}(U) := R_S}$$

dove $S = \{ f\in R \mid U\subset X_f \} = \{ f\in R \mid V(f) \subset X\setminus U \}$

- Se $U = X_g$, allora $f\in S \iff X_g \subseteq X_f \iff$ $g\in\sqrt{(f)} \iff f$ divide una potenza di g $\iff f \in \operatorname{Sat}\{g^n\}$, cioè: $S = \operatorname{Sat}\{g^n\}$

...ne: S dipende solo da U e non da g.

Abbiamo anche:

$$\mathcal{O}(U) \underset{\text{canonicamente}}{\cong} R_g \quad \forall g \text{ t.c. } U = X_g$$

Definiamo anche gli omom. di restrizione sugli aperti principali.

Se V è un altro aperto principale, $V \subseteq U$, allora

$$S_V := \{ f \in R \mid V \subseteq X_f \} \supset S_U$$

$\Rightarrow$ abbiamo un omo naturale

$$\rho^U_V : \mathcal{O}(U) = R_{S_U} \longrightarrow \mathcal{O}(V) = R_{S_V}.$$

NB facile verificare la funtorialità

NB se $U = X_g$ e $V = X_h$, allora $V \subseteq U \Rightarrow h \in \sqrt{(g)}$, cioè $h^m = g \cdot a$ con $a \in R$

allora ρ coincide con l'omom.

$$R_g \longrightarrow R_h$$

$$\frac{r}{g^n} = \frac{r \cdot a^n}{g^n a^n} = \frac{r \cdot a^n}{h^{mn}} \longmapsto \frac{r \cdot a^n}{h^{mn}}$$

Mostriamo ora che $\mathcal{O}$ soddisfa gli assiomi di fascio rispetto alla base $\mathcal{B}$ degli aperti principali.

OSS $X_f \cap X_g = X_{fg}$

infatti: $[\mathfrak{P}] \in X_f \cap X_g \Leftrightarrow f \notin \mathfrak{P}$, $g \notin \mathfrak{P}$

$\Leftrightarrow f \cdot g \notin \mathfrak{P}$ ($\mathfrak{P}$ primo) $\Leftrightarrow [\mathfrak{P}] \in X_{fg}$.

Prop Sia $X = \operatorname{Spec} R$ e $X_f = \bigcup_{\alpha \in A} X_{f_\alpha}$.

1) Se $g, h \in R_f$ diventano uguali in ogni X_{f_α}, allora $g = h$.

2) Se $\forall \alpha \; \exists \, g_\alpha \in R_{f_\alpha}$ t.c. $\forall \alpha, \beta$ le immagini di g_α e g_β in $R_{f_\alpha f_\beta}$ sono uguali, allora

$\exists g \in R_f$ t.c. $g_{|X_{f_\alpha}} = g_\alpha$.

$\boxed{\text{DIM.}}$ 1) Consideriamo anzitutto il caso $f = 1$, cioè $X = X_f$ e $R = R_f$. Siccome X è cpt, abbiamo: $X = X_{f_1} \cup \dots \cup X_{f_r}$.

Se $(g-h)_{|R_{f_i}} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, r$

allora $\forall i \ \exists m_i \in \mathbb{N}$ t.c.

$$f_i^{m_i}(g-h) = 0 \quad \text{in } R$$

~~$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ t.c. $f_i^N(g-h) = 0 \ \forall i = 1, \dots, r$~~ $\Big/ \ X_{f_i} = X_{f_i^{m_i}}$

ma: $X = \bigcup_{i=1}^r X_{f_i} = \bigcup_{i=1}^r X_{f_i^{m_i}} \Rightarrow 1 = (f_1^{m_1}, \dots, f_r^{m_r})$

$\Rightarrow \exists a_1, \dots, a_r \in R$ t.c. $1 = a_1 f_1^{m_1} + \dots + a_r f_r^{m_r}$

~~$\Rightarrow 1 = \left(\sum_{i=1}^r a_i f_i\right)^M, \ \forall M \in \mathbb{N}$~~ $\Rightarrow g - h = \sum_{i=1}^r a_i f_i^{m_i}(g-h) = 0$

~~se $M \geq$ (N-1)~~ $\rightarrow$ ~~qui mancano $f_1^{j_1} \cdots f_r^{j_r}$ con $M = \sum j_i$~~

~~se $j_i \leq N-1 \ \forall i$, allora $\sum j_i \leq r(N-1)$~~

~~$\Rightarrow$ se $M > r(N-1)$, allora $1 \cdot (g-h) = 0$ ok~~

2) Consideriamo $g_i \in R_{f_i}$ $i = 1, \dots, r$

$g_i = \dfrac{a_i}{f_i^{m_i}}$ $\quad \Rightarrow f_i^{m_i} \cdot g_i = a_{i|X_i}$, $a_i \in R$

$a_i \in R$

$\Rightarrow$ a meno di moltiplicare per una potenza di f, ~~possiamo supporre che~~ $\exists N \in \mathbb{N}$, $b_i \in R$ t.c.

$$f_i^N \cdot g_i = b_{i|X_i} \quad \forall i = 1, \dots, r.$$

Inoltre: $g_{i|X_i \cap X_j} = g_{j|X_i \cap X_j}$

$\Rightarrow g_i = \frac{b_i}{f_i^N}$ e $g_j = \frac{b_j}{f_j^N}$ diventano uguali in $R_{f_i \cdot f_j}$

~~$\Rightarrow \exists m_{ij}$ t.c. $f_i^{m_{ij}} f_j^{m_{ij}} g_i = f_i^{m_{ij}} f_j^{m_{ij}} g_j$~~

di nuovo a meno di [illegible] in [illegible]
possiamo supporre che

$\Rightarrow \exists m_{ij}$ t.c.

$$(f_i f_j)^{m_{ij}} \left(f_j^N b_i - f_i^N b_j \right) = 0 \quad \text{in } R \quad \forall i,j$$

$\Rightarrow \exists M \in \mathbb{N}$ t.c. $(f_i f_j)^M \left(f_j^N b_i - f_i^N b_j \right) = 0$ in R $\forall i,j$

$$\underbrace{f_i^M f_j^{M+N} b_i}_{\substack{\parallel \\ c_i}} = f_i^{N+M} \underbrace{f_j^M b_j}_{c_j} \quad \text{in } R \quad \forall i,j$$

$N' := M+N$

$\rightsquigarrow \quad f_i = \dfrac{b_i}{f_i^N} = \dfrac{c_i}{f_i^{N'}}$

e: $\quad f_j^{N'} c_i = f_i^{N'} c_j \quad \forall i,j.$

Ora: $\left(f_1^{N'}, \dots, f_r^{N'} \right) = 1$

$\Rightarrow 1 = u_1 f_1^{N'} + \dots + u_r f_r^{N'} \qquad u_i \in R$

Sia: $g := \sum_{i=1}^r u_i c_i \in R$. Allora:

$$f_j^{N'} \cdot g = \sum_{i=1}^r u_i \, f_j^{N'} \cdot c_i = \sum_{i=1}^r u_i \, f_i^{N'} c_j =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^r u_i f_i^{N'} \right) c_j = c_j$$

~~calcolo~~ si può verificare che inoltre $g_{|X_{f_\alpha}} = g_\alpha \; \forall \alpha$.

$\Rightarrow$ in R_{f_j} abbiamo $\boxed{g_{|X_j} = \dfrac{c_j}{f_j^{N'}} = g_j}$

Esercizio: sia $X' = X_f$, $R' = R_f$. Mostrare che un aperto princ. U di X' è un aperto princ. anche per X, e che $\mathcal{O}_{X'}(U) \cong \mathcal{O}_X(U)$.

Caso generale: già fatto, perché
$X' = X_f = \operatorname{Spec} R'$ con $R' = R_f$
e per ogni $g' \in R'$, $g' = \frac{g}{f^n}$, $X'_{g'} = X_g \subset X$ e $R'_{g'} \cong R_g$.

Grazie alla proposizione, possiamo definire il fascio strutturale $\mathcal{O}_X$.

<u>Prop</u> $\forall x = [\mathfrak{p}] \in \operatorname{Spec} R$ si ha

$$\underbrace{\mathcal{O}_{X,x}}_{\substack{\text{SPIGA del} \\ \text{fascio } \mathcal{O} \text{ in } x}} \cong R_{\mathfrak{p}} \to \text{localizzazione.}$$

$\boxed{\text{DIM}}$ Gli aperti principali contenenti x formano un sistema fondamentale di intorni di x
$\Rightarrow$ possiamo costruire la spiga usando solo gli aperti principali:

$$\mathcal{O}_x = \varinjlim_{x \in X_f} \mathcal{O}(X_f) = \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} R_f$$

$$x \in X_f \iff f \notin \mathfrak{p}$$

Abbiamo un omo naturale

$$R_f \to R_{\mathfrak{p}} \quad \forall f \notin \mathfrak{p}$$

che induce un omo naturale

$$\phi : \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} R_f \to R_{\mathfrak{p}}.$$

Se $\xi \in \ker \phi$: $\xi = \left[\frac{a}{f^n}\right]$ $\quad a \in R$, $n \in \mathbb{N}$, $f \notin \mathfrak{p}$

t.c. $\frac{a}{f^n} = 0$ in $R_{\mathfrak{p}}$

$\Rightarrow \exists\, g \in R \setminus \mathfrak{p}$ t.c. $g \cdot a = 0$

$\Rightarrow \xi = 0$ in R_{fg}.

$\Rightarrow \phi$ iniettivo.

Viceversa se $\frac{a}{b} \in R_p$ con $a \in R$, $b \notin p$

$\Rightarrow \frac{a}{b} \in R_b$ è una controimm. di $\frac{a}{b}$.

$\Rightarrow \phi$ suriettivo.

OSS In particolare: la spiga $\mathcal{O}_x$ è sempre un ANELLO LOCALE.

Def Uno SPAZIO ANELLATO è una coppia $(X, \mathcal{O})$ dove X è uno spazio topologico e $\mathcal{O}$ è un fascio di anelli su X.

(qui sto seguendo Ravi Vakil).

Anneltato,

ES $(X = \operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio anellato.

Definiamo un isomorfismo di spazi anellati $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ come:

- un omeomorfismo $\pi: X \to Y$

e: - un isomorfismo di fasci di anelli tra $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_Y$, considerati come fasci sullo stesso spazio top. via π.

Def Uno SCHEMA AFFINE è uno spazio anellato $(X, \mathcal{O}_X)$ isomorfo a $(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$ per qualche anello R.

OSS Deve essere necessariamente $R = \mathcal{O}_X(X)$ sezioni globali del fascio.

Def Uno SCHEMA è uno spazio anellato $(X, \mathcal{O}_X)$ t.c. ogni pto x ha un intorno aperto U t.c. $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ è uno schema affine.

- $\mathcal{O}_X$ è detto fascio strutturale, o fascio delle funzioni regolari
- Spesso scriviamo X per lo schema, dando per implicito il fascio $\mathcal{O}$
- La topologia di uno schema è detta topol. di Zariski, come nel caso affine

Def Un isomorfismo di schemi è un isomorfismo come spazi anellati.

OSS Sia $(X, \mathcal{O})$ uno schema e $x \in X$. Allora la spiga $\mathcal{O}_x$ è un anello locale

Uno spazio anellato che ha questa proprietà si dice anche SPAZIO LOCALMENTE ANELLATO.

Sia $m_x \subset \mathcal{O}_x$ ~~l'anello~~ l'ideale massimale.

Allora $k(x) := \frac{\mathcal{O}_x}{m_x}$ è un campo, detto CAMPO RESIDUO in x.

Se $U \subset X$ aperto e $f \in \mathcal{O}(U)$, allora $\forall x \in U$ f ha un "valore" $f(x) \in k(x)$ come: $[f_*]_x \in \mathcal{O}_x$ preso e quozientiamo per m_x.