Def Uno SCHEMA è uno spazio anellato $(X, \mathcal{O}_X)$ t.c. ogni pto x ha un intorno aperto U t.c. $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ è uno schema affine.

- $\mathcal{O}_X$ è detto fascio strutturale, o fascio delle funzioni regolari
- Spesso scriviamo X per lo schema, dando per implicito il fascio $\mathcal{O}$
- La topologia di uno schema è detta topol. di Zariski, come nel caso affine

Def Un isomorfismo di schemi è un isomorfismo come spazi anellati.

OSS Sia $(X, \mathcal{O})$ uno schema e $x \in X$. Allora la spiga $\mathcal{O}_x$ è un anello locale

Uno spazio anellato che ha questa proprietà si dice anche SPAZIO LOCALMENTE ANELLATO.

Sia $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_x$ ~~l'anello~~ l'ideale massimale.

Allora $k(x) := \frac{\mathcal{O}_x}{\mathfrak{m}_x}$ è un campo, detto CAMPO RESIDUO in x.

Se $U \subset X$ aperto e $f \in \mathcal{O}(U)$, allora $\forall x \in U$ f ha un "valore" $f(x) \in k(x)$ come: $[f_*]_x \in \mathcal{O}_x$ preso e quozientando per $\mathfrak{m}_x$.

Diciamo che f si ANNULLA in x se $f(x)=0$ in $k(x)$, cioè se $[f]_x \in \mathfrak{m}_x$ (ovvero: $[f]_x$ non è invertibile in $\mathcal{O}_x$)

OSS Sia $X = \operatorname{Spec} R$ affine e $x = [\mathfrak{p}]$. Allora

$$\mathcal{O}_x = R_{\mathfrak{p}}$$
$$\text{e } \mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \subset R_{\mathfrak{p}}$$

$$\Rightarrow k(x) = \frac{R_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}} = \operatorname{Frac}\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$$

dimostr. per. c'è solo nel caso affine.

(cioè: è lo stesso prima quozientare per $\mathfrak{p}$ e poi prendere il campo dei quozienti, oppure prima localizzare e poi quozientare).

NB la "funzione" associata a f non determina f.

Per esempio se R ha nilpotenti: $N_R \neq (0)$ e $f \in N_R$, allora $f \in \mathfrak{p}$ $\forall \mathfrak{p}$ primo di R

$$\Rightarrow \bar{f}(x) = 0 \quad \forall x \in \operatorname{Spec} R.$$

ES $X = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[x,y] = \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$

Se $f \in \mathbb{C}[x,y]$

$$X_f = \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \setminus V(f)$$

e $\mathcal{O}(X_f) = \left\{ \frac{g(x,y)}{f(x,y)^n} \;\middle|\; g \in \mathbb{C}[x,y] \right\}$ $\subset \mathbb{C}(x,y)$

funzioni regolari su X_f

$\Rightarrow \forall U \subset X$ aperto, $\mathcal{O}(U)$ sono le funzioni regolari su U nel senso usuale.

Se ~~x∈ℂ~~ $p = (a,b) = [(x-a, y-b)] \in X$

allora $\mathcal{O}_p = \mathbb{C}[x,y]_{(x-a,\, y-b)} =$

$$= \left\{ \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \;\middle|\; g(a,b) \neq 0 \right\} \subset \mathbb{C}(x,y)$$

germi di funt. reg. in p.

Se $q = [(f(x,y))] \in X$ con f irrid.

(pto generico della curva $f(x,y) = 0$):

$$\mathcal{O}_q = \left\{ \frac{g(x,y)}{h(x,y)} \;\middle|\; f \nmid h \right\} \subset \mathbb{C}(x,y)$$

$$\parallel$$

$\left\{ \frac{g}{h} \;\middle|\; h \notin I(V(f)) \right\}$ funt. razionali non id. nulle sulla curva ai regolari su un aperto della curva:

$$\xi = [(0)] \in X \quad \text{pto generico}$$

$$\mathcal{O}_\xi = \mathbb{C}[x,y]_{(0)} = \mathbb{C}(x,y) \quad \text{funzioni razionali su } X.$$

Scriviamo anche i campi residui dei pti:

<u>punti chiusi</u>: $\quad p = (a,b)$

$$k(p) = \frac{\mathcal{O}_p}{(x-a,\, y-b)} \cong \mathbb{C}$$

<u>pti generici di curve</u>: $\quad q = [(f)]$

$$k(q) = \frac{\mathcal{O}_q}{(f)} \cong \mathrm{Frac}\left(\frac{\mathbb{C}[x,y]}{(f)}\right)$$

|| campo delle funz. razionali della curva $f(x,y)=0$

<u>Su ξ</u>: $\quad k(\xi) = \mathcal{O}_\xi = \mathbb{C}(X).$

Un esempio di schema non affine

Sia $X = \{p, q_1, q_2\}$ con la topologia data dagli aperti:

$U_1 = \{p, q_1\}$, $U_2 = \{p, q_2\}$, $\{p\}$, $\emptyset$, X

$\rightsquigarrow$ q_1, q_2 sono punti chiusi (non aperti), p è un punto aperto (non chiuso) $\Rightarrow$ X irid.
punto generico
(~~chiuso~~ chiuso).

(chiusi: $\{q_2\}$, $\{q_1\}$, $\{q_1, q_2\}$, $\emptyset$, X).

Definiamo un fascio di anelli su X:

$$\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(U_1) = \mathcal{O}(U_2) = k[x]_{(x)}$$ (loc. nell'ideale primo)

$$\mathcal{O}(\{p\}) = k(x) = \mathrm{Frac}\, k[x] \qquad \mathcal{O}(\emptyset) = (0)$$

le restrizioni $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(\{p\})$ e $\mathcal{O}(U_i) \to \mathcal{O}(\{p\})$ sono le inclusioni naturali:

$$k[x] \hookrightarrow k[x]_{(x)} \xhookrightarrow{\rho} k(x)$$

- $\mathcal{O}$ è chiaramente un prefascio
- assiomi di fascio: $U_1, U_2, \{p\}$ non hanno ricop. aperti non banali

unica possibilità: $X = U_1 \cup U_2$

Siano $f_i \in \mathcal{O}(U_i) = k[x]_{(x)}$ t.c. $f_1 = f_2$ in $k(x)$

$\Rightarrow f_1 = f_2$ anche in $k[x]_{(x)}$ perché ρ è iniettiva

$\Rightarrow f_1 \in \mathcal{O}(X)$ e si restringe a f_i in $\mathcal{O}(U_i)$, inoltre è chiaramente unica. $\Rightarrow$ $\mathcal{O}$ è un fascio.

Ricordiamo che: i primi di $k[x]_{(x)}$ corr. 1:1 ai primi di $k[x]$ contenuti in (x), che sono solo: (0), (x)

$\Rightarrow$ se $R = k[x]_{(x)}$, $\operatorname{Spec} R = \{\underset{\substack{\text{aperto}\\ \text{e chiuso}}}{\overset{a}{(0)}}, \underset{\text{chiuso}}{\overset{b}{(x)}}\}$

$\Rightarrow$ finalmente X non è affine, perché ha 3 pti.

Oss. anche che:

$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(\operatorname{Spec} R) = R = k[x]_{(x)}$

$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(\{a\}) = ?$ oss. che $x \notin (0)$
$x \in (x)$

$\Rightarrow V_{\operatorname{Spec} R}(x) = \{(x)\}$ $\Rightarrow$ $\{(0)\}$ è un aperto principale $(\operatorname{Spec} R)_x$

$\Rightarrow \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(\{a\}) = R_x = k(x)$.

Note sulle spighe:
$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R, a} = k(x)$
$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R, b} = k[x]_{(x)}$

Mostriamo ora che $(U_i, \mathcal{O}_{X|U_i})$ è uno schema affine per $i = 1, 2$, e che in effetti è isomorfo a $\operatorname{Spec} R$.

- U_i ha due punti, uno aperto e chiuso e uno chiuso, non aperto

$\Rightarrow U_i$ è omeo a $\operatorname{Spec} R$.
Inoltre vediamo che anche il fascio coincide

$\Rightarrow U_i \cong \operatorname{Spec} R$ $i = 1, 2$

$\Rightarrow (U_i, \mathcal{O}_{X|U_i})$ è uno schema affine

$\Rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ <u>è uno schema</u>

<u>Esercizio</u>: Se R è un dominio e $\eta = [(0)] \in \operatorname{Spec} R$ è il pto generico, mostrare che

$$\mathcal{O}_\eta \cong k(\eta) \cong \operatorname{Frac}(R).$$

Sottoschemi aperti & aperti affini

Def Sia $(X, \mathcal{O})$ uno schema.
Un APERTO AFFINE di X è un aperto $U \subset X$ t.c. $(U, \mathcal{O}_{|U})$ sia isomorfo a uno schema affine.

OSS 1 Gli aperti affini formano una base della topologia di X.

(DIM) ~~Per che~~ Per definizione, X è ricoperto da aperti affini:
$$X = \bigcup_{\alpha} A_\alpha \qquad A_\alpha \text{ affini}$$
Sia $U \subseteq X$ un aperto qualsiasi. Allora
$$U = \bigcup_{\alpha} (U \cap A_\alpha)$$

$U \cap A_\alpha$ aperto di A_α

- in A_α gli aperti principali formano una base, e sono aperti affini

$\Rightarrow U \cap A_\alpha$ è unione di aperti affini, $\forall \alpha$

$\Rightarrow U$ è unione di aperti affini.

OSS 2 Per ogni aperto $U \subset X$, la coppia $(U, \mathcal{O}_{|U})$ è ancora uno schema, e si dice SOTTOSCHEMA APERTO di X (è determinato dall'aperto U).

Infatti: $(U, \mathcal{O}_{U})$ è unione di aperti affini.

Morfismi di schemi.

Vogliamo definire un morfismo di schemi
$$(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$
Vorremo anzitutto una mappa continua
$$f : X \longrightarrow Y.$$
Oss. che quando consideriamo fasci di funzioni, una mappa $X \to Y$ determina automaticamente un pullback di funzioni, dato dalla composizione con f:
$$\mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \quad \forall\, U \subseteq Y \text{ aperto.}$$
Nel caso degli schemi però, un'appl. continua $f : X \to Y$ non basta a determinare un pull-back di funzioni.

Lo inseriamo quindi nella definizione di morfismo: oltre a $f : X \to Y$, il morfismo è dato da una collezione di omom. di anelli
$$f_U^{\#} = f_U^{*} : \mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \quad \forall\, U \subseteq Y \text{ aperto}$$
che siano compatibili con le restrizioni, ovvero se $V \subseteq U$ aperti di Y, il diagramma
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y(U) & \xrightarrow{f_U^*} & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \\ \downarrow \rho_V^U & \circlearrowleft & \downarrow \rho^{f^{-1}(U)}_{f^{-1}(V)} \\ \mathcal{O}_Y(V) & \xrightarrow{f_V^*} & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \end{array} \quad \text{commuta} \quad (*)$$

Osserviamo che c'è un modo conveniente in termini di esprimere le f_U^* in termini di morfismi di fasci.

Data $f: X \to Y$ continua, usiamo f per definire un fascio di anelli su Y, i.e. (PUSH-FORWARD) o IMMAGINE DIRETTA di $\mathcal{O}_X$:

$$f_* \mathcal{O}_X$$

ponendo semplicemente, $\forall U \subseteq Y$ aperto:

$$(f_* \mathcal{O}_X)(U) := \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$$

e le restrizioni sono date dalle restrizioni di $\mathcal{O}_X$.

Esercizio: Verificare che se $\mathcal{F}$ è un fascio su X e $f: X \to Y$ continua, allora $f_* \mathcal{F}$ è un fascio su Y.

Allora possiamo vedere f_U^* come omom.

$$\mathcal{O}_Y(U) \xrightarrow{f_U^*} (f_* \mathcal{O}_X)(U) \quad \forall U \subseteq Y \text{ aperto}$$

e la condizione $(*)$ ci dice che abbiamo un morfismo di fasci di anelli

$$f^\#: \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X.$$

$\rightsquigarrow$ un morfismo di schemi $f: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ sarà dato da $f: X \to Y$ continua e

$f^{\#}: \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ morfismo di fasci.

Ci serve però ancora una condizione.

Consideriamo $U \subseteq Y$ aperto e

$$f_U^*: \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)).$$

Se lo pensiamo come un "vero" pullback di funzioni: $\forall p \in U$, $\forall q \in f^{-1}(p)$, $\forall g \in \mathcal{O}_Y(U)$

abbiamo: $\underbrace{g(p)=0}_{\substack{\text{significa:} \\ [g]_p \in m_p \subset \mathcal{O}_{Y,p}}} \Longrightarrow \underbrace{f^*(g)(q)=0}_{[f^*(g)]_q \in m_q \subset \mathcal{O}_{X,q}}$.

Nel nostro setting, il morfismo di fasci $f^{\#}: \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ induce passando al limite diretto un morfismo sulle spighe

~~$\mathcal{O}_{Y,p} \to (f_* \mathcal{O}_X)_p$~~

$$\mathcal{O}_{Y,p} = \varinjlim_{p \in U \subset Y} \mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow \underbrace{\varinjlim_{p \in U \subset Y} \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))}_{= (f_* \mathcal{O}_X)_p}$$

$$\downarrow \text{ morfismo naturale}$$

$$\xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{X,q} =: \varinjlim_{q \in V \subset X} \mathcal{O}_X(V)$$

Abbiamo:

$$\psi([g]_p) = [f^{\#}(g)]_q$$

associa a ogni $\varphi \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ il suo germe in q

Oss. che $\mathcal{O}_{X,q}$ e $\mathcal{O}_{Y,p}$ sono anelli lo[cali]

e $\psi^{-1}(m_q)$ è un ideale primo

$\Rightarrow$ sicuramente $\psi^{-1}(m_q) \subseteq m_p$

$\Rightarrow$ se $f^{\#}(g)$ si annulla in q, allora g si annulla in p.

Tuttavia in generale non è detto che

$$\psi(m_p) \subseteq m_q \qquad \left(\begin{matrix}\text{equiv:}\\ m_p = \psi^{-1}(m_q)\end{matrix}\right)$$

(che dà l'altra implicazione).

Ma lo richiediamo nella definizione.

<u>Def</u> Uno morfismo di spazi anellati

$$f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

è il dato di un'appl. continua

$$f : X \to Y$$

e di un morfismo di fasci di anelli

$$f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X .$$

<u>Def</u> Un morfismo di spazi <u>localmente</u> anellati

$$f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

è un morfismo di spazi anellati $(f, f^{\#})$ t.c. $\forall q \in X$ l'omomorfismo indotto nelle spighe $\xrightarrow{\text{anelli locali}}$

$$\psi : \mathcal{O}_{Y, f(q)} \to \mathcal{O}_{X, q} \quad \text{è LOCALE}$$

ovvero $\psi(m_{f(q)}) \subseteq m_q$.

Un morfismo di schemi è un morfismo di spazi localmente anellati.

<u>Oss</u> $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ morfismo di schemi

$\forall q \in X$ f induce un omom. anche tra i campi residui: $\underbrace{k(f(q))}_{\text{in } Y} \to \underbrace{k(q)}_{\text{in } X}$

infatti: $\psi : \mathcal{O}_{Y, f(q)} \to \mathcal{O}_{X, q}$
manda $m_{f(q)}$ in m_q

$\Rightarrow$ passa al quoziente

$$k(f(q)) := \frac{\mathcal{O}_{Y, f(q)}}{m_{f(q)}} \xrightarrow{k_q} \frac{\mathcal{O}_{X,q}}{m_q} =: k(q)$$

Allora se $U \subset Y$ è un intorno aperto di $f(q)$
e $g \in \mathcal{O}_Y(U)$

$$k_q(\underset{\substack{\cap \\ k(f(q))}}{\overline{g}(f(q))}) = \underbrace{\overline{f^\#_U(g)\,(q)}}_{\substack{\cap \\ k(q)}}$$

(<u>verificare per esercizio</u>)

~~caso particolare:~~