Prop e Def

- È ovvio come definire la composizione di morfismi di schemi, e l'identità, così otteniamo una categoria e la nozione di isomorfismo.

<u>ES</u> Mostra che questa nozione di <u>isom.</u> coincide con quella degli spazi anellati.

<u>Thm</u> Sia X uno schema e R un anello. Consideriamo l'applicazione:

omo di anelli

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{c} \text{morfismi di} \\ \text{schemi } X \to \operatorname{Spec} R \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \operatorname{Hom}(R, \mathcal{O}_X(X)) \right\}$$

$$f \longmapsto f^{\#}_X : R \to \mathcal{O}_X(X)$$

Allora: Φ è <u>biunivoca</u>.

$\boxed{\text{DIM}}$ Mostriamo anzitutto che Φ è iniettiva. Sia $\varphi_f := f^{\#}_X$, e mostriamo che f è determinata da φ_f.

Mostriamo anzitutto che l'applicazione insiemistica

$$f : X \to \operatorname{Spec} R$$

è determinata da φ_f.

Sia $x \in X$, vogliamo determinare $f(x) = (\mathfrak{p}) \in \operatorname{Spec} R$

ES Siano R, S anelli e
$$\varphi: R \to S$$
omo di anelli. Mostriamo che φ definisce in naturale un morfismo di schemi
$$(f, f^{\#}): \underset{=X}{\operatorname{Spec} S} \longrightarrow \underset{=Y}{\operatorname{Spec} R}$$
t.c. $\varphi = f^{\#}_Y : \underset{\substack{\shortparallel \\ R}}{\mathcal{O}_Y(Y)} \longrightarrow \underset{\substack{\shortparallel \\ S}}{\mathcal{O}_X(X)}$.

Definiamo anzitutto
$$f: X \longrightarrow Y$$
$$[\mathfrak{P}] \longmapsto [\varphi^{-1}(\mathfrak{P})]$$

- ben definita perché $\varphi^{-1}(\mathfrak{P})$ è un ideale primo
- continua: se $I \subset R$ è un insieme qualsiasi
  $\leadsto V(I) \subset Y = \operatorname{Spec} R$ chiuso

allora si ha:
$$f^{-1}(V(I)) = V(\underbrace{\varphi(I)}_{\text{sott. di } S}) \quad \text{è chiuso di } \underset{\operatorname{Spec} S}{\overset{\shortparallel}{X}}.$$

Dato $\mathfrak{P} \subset S$ primo infatti:

$[\mathfrak{P}] \in V(\varphi(I)) \iff \varphi(I) \subset \mathfrak{P} \iff I \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{P})$

$\iff \underset{\substack{\shortparallel \\ f([\mathfrak{P}])}}{[\varphi^{-1}(\mathfrak{P})]} \in V(I) \iff [\mathfrak{P}] \in f^{-1}(V(I))$

Definiamo poi un morfismo di fasci

$$f^{\#} : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_* \mathcal{O}_X$$

Basta farlo sugli aperti principali di Y.

Data $g \in R$ $\qquad Y_g \subset Y$ aperto principale

$$Y_g = Y \setminus V(g)$$

$$f^{-1}(Y_g) = X \setminus f^{-1}(V(g)) =$$

$$= X \setminus V(\underbrace{\varphi(g)}_{\in S}) = X_{\varphi(g)}$$

aperto princ. di X

Allora $\varphi : R \to S$ definisce in maniera naturale un omom. tra le localizzazioni:

$$f^{\#}_{Y_g} : R_g \longrightarrow S_{\varphi(g)}$$

$$\frac{a}{g^n} \longmapsto \frac{\varphi(a)}{\varphi(g)^n}$$

ed è facile vedere che tali omom. sono compatibili con le restrizioni perché sono indotti da φ.

ci abbiamo un morfismo di fasci

$$f^{\#} : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_* \mathcal{O}_X .$$

Consideriamo ora un p.to

$$x = [\mathfrak{p}] \in X = \operatorname{Spec} S$$

$$\text{e} \quad y = [\varphi^{-1}(\mathfrak{p})] \in Y = \operatorname{Spec} R$$

Allora $f^{\#}$ induce un omo tra le ~~ste~~ spighe:

$$\psi : \underset{\underset{R_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})}}{\parallel}}{\mathcal{O}_{Y,y}} \longrightarrow \underset{\underset{S_{\mathfrak{p}}}{\parallel}}{\mathcal{O}_{X,x}}$$

che è ancora indotto da φ:

$$b \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \quad \frac{a}{b} \longmapsto \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)} \qquad \varphi(b) \notin \mathfrak{p}$$

Verifichiamo che $\psi(\mathfrak{m}_y) \subseteq \mathfrak{m}_x$.
Gli elementi di $\mathfrak{m}_y$ sono $\frac{a}{b}$ con $b \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, $a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$

$$\Rightarrow \psi\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\overbrace{\varphi(a)}^{\in \mathfrak{p}}}{\varphi(b)} \in \mathfrak{m}_y \quad \underline{\underline{\text{ok}}}$$

$\rightsquigarrow$ otteniamo un morfismo di schemi.

$\boxtimes$

Vogliamo adesso vedere che ogni morfismo di schemi affini è ottenuto in questo modo. Mostriamo una cosa più generale:

<u>Teorema</u>. Siano X uno schema e R un anello. L'applicazione

~~ES Sia R un anello con nilpotenti cioè $N_R \neq (0)$ nilradicale di~~

$$\phi: \left\{ \begin{matrix} \text{morfismi di} \\ \text{schemi } X \to \operatorname{Spec} R \end{matrix} \right\} \longrightarrow \{ \underbrace{\operatorname{Hom}(R, \mathcal{O}_X(X))}_{\text{omo di anelli}} \}$$

$$(f, f^\#) \longmapsto f^\#_X$$

è biunivoca.

$\boxed{\text{DIM}}$ Costruiamo l'inversa.

Sia $\varphi: R \to \mathcal{O}_X(X)$ e costruiamo un morfismo di schemi $(f, f^\#): X \to \operatorname{Spec} R = Y$.

Sia $x \in X$ e consideriamo la composizione

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend left, "\alpha_x"] & \mathcal{O}_X(X) \arrow[r] & \mathcal{O}_{X,x} \end{tikzcd}$$

e sia $\mathfrak{p} := \alpha_x^{-1}(\mathfrak{m}_x)$

- $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di R

Poniamo $f(x) := [\mathfrak{p}] \in Y$.

$\rightsquigarrow f: X \to Y$.

- f è continua: sia $V(S) \subset Y$ un chiuso, $S \subset R$ insieme

$$V(S) = \{ y \in Y \mid g(y) = 0 \ \forall g \in S \}$$

allora

$$f^{-1}(V(S)) \overset{\text{verificare per esercizio}}{=} V(\varphi(S)) \text{ chiuso in } X.$$

OSS Sia X uno schema e $S \subset \mathcal{O}_X(X)$.

NB quando X è affine, questo coincide con la def. usuale di $V(S)$.

Consideriamo

$$V(S) := \{x \in X \mid f(x) = 0 \ \forall f \in S\}.$$

Allora $V(S)$ è chiuso in X.

DIM $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ ricopr. affine

se $V(S) \cap U_\alpha$ è chiuso in U_α $\forall \alpha$, allora $V(S)$ è chiuso in X

Oss. che $\rho : \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(U_\alpha)$

e se $x \in U_\alpha$ e $f \in \mathcal{O}(X)$, allora

$$f_{|U_\alpha}(x) = 0 \iff f(x) = 0$$

perché dipende solo dal germe $[f]_x$ (se è in m_x o no).

⇝ basta mostrare l'asserto per X affine.

Se $X = \operatorname{Spec} R$, $x = [\mathfrak{p}]$, e $f \in R$, allora $f(x) = 0 \iff$ in $R_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_x$ $f \in m_x$

cioè $f = \frac{a}{b}$ con $a \in \mathfrak{p}$, $b \notin \mathfrak{p}$

$\Rightarrow \exists\, s \in R \setminus P$ t.c.

$$s \cdot (bf - a) = 0 \quad \text{in } R$$

in particolare: $s \cdot (bf - a) \in P$

$s \notin P \Rightarrow bf - a \in P$

$$\Rightarrow bf = (bf - a) + a \in P$$

$$b \notin P \Rightarrow f \in P.$$

$\rightsquigarrow f(x) = 0 \iff f \in P \iff x = (P) \in V(f)$. in R

$\rightsquigarrow V(S)$ chiuso, perché coincide col il chiuso usuale.

__Coroll. 1__ Siano R, S anelli. Si ha una biezione:

$$\mathrm{Hom}(R, S) \xleftrightarrow{1:1} \mathrm{Mor}(\mathrm{Spec}\, S \to \mathrm{Spec}\, R)$$

__Coroll. 2__ $\mathrm{Spec}\, R \cong \mathrm{Spec}\, S \iff R \cong S$

e si ha un'equivalenza di categorie tra la categoria degli anelli e quella degli schemi affini.

__Coroll. 3__ Siano X, Y schemi affini, e $f: X \to Y$ morfismo.

Allora ~~f è iso~~ f è isom. di morfismo.

$\iff f^{\#}_{X}: \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$ è isom.

__ES.__ Consideriamo un anello R con nilpotenti; $N_R \neq (0)$, e sia $\pi: R \to \dfrac{R}{N_R} =: S$ il quoziente.

Sia $f: \mathrm{Spec}\, S \to \mathrm{Spec}\, R$ il morfismo di schemi definito da π.

Oss. che, come mappe negli spazi top
f è omeomorfismo. Infatti:

$$f: \operatorname{Spec} \frac{R}{N} \longrightarrow \operatorname{Spec} R$$
$$P \longmapsto \pi^{-1}(P)$$

Se $Q \subset R$ è primo, allora $N \subset Q$

$$\Rightarrow Q = \pi^{-1}(\underbrace{\pi(Q)}_{\text{primo di } \frac{R}{N}})$$

$\Rightarrow f$ è biunivoca.

Inoltre se $V(I) \subset \operatorname{Spec} \frac{R}{N}$ è un chiuso, allora

$$f(V(I)) = V(\pi^{-1}(I))$$

$\rightsquigarrow f$ è chiusa $\rightsquigarrow f$ è omeo.

<u>Oss</u>: f <u>non è</u> isomorfismo, perché non lo è f_π.

Corollario Per ogni schema X ~~esiste~~ $\exists !$ un morfismo $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$

($\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ è un "oggetto terminale" nella categoria degli schemi)

Esercizio Mostra che il morfismo $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ è dato da:

$$x \longmapsto [(\operatorname{char} \underbrace{k(x)}_{\text{campo residuo}})]$$

(sugg: posso considerare un intorno aperto affine di x).

OSS Sia R un anello. Dare un morfismo

$$X \to \operatorname{Spec} R$$

è equivalente a dare un omo di anelli

$$R \to \mathcal{O}(X)$$

e questo è a sua volta equiv. a dare a $\mathcal{O}(X)$ la struttura di R algebra.

Inoltre: $\forall U \subset X$ abbiamo

$$R \to \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(U)$$

$\leadsto$ anche $\mathcal{O}_X(U)$ prende ~~la~~ struttura di R-algebra, in modo t.c. le restrizioni siano omo di R-algebre $\leadsto$ $\mathcal{O}_X$ è un fascio di R-algebre.

Si dice allora che X è uno <u>schema su R</u>, o <u>R-schema</u>. (~~OSS~~

Ci interessa in particolare il caso in cui $R=k$ è un campo: X è uno schema su k se $\exists\, X \to \operatorname{Spec} k \iff \mathcal{O}_X$ è un fascio di k-algebre

In questo caso, se vogliamo lavorare con schemi su R, considereremo solo morfismi di schemi che rispettano questa struttura:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[dl] \\ & \operatorname{Spec} R & \end{tikzcd}$$

ovvero: $(f, f^\#): X \to Y$ è t.c. $f^\#$ è un morfismo di fasci di R-algebre

⇝ otteniamo la categoria degli schemi su R

(NB questo può essere generalizzato ulteriormente considerando uno schema al posto di $\operatorname{Spec} R$)

OSS Sia X uno schema e $Z \subset X$ un chiuso irriducibile (come sp. top.).

Allora $\exists!\, z \in X$ t.c. $Z = \overline{\{z\}}$; z è detto PUNTO GENERICO di Z.

DIM. Sia $U \subset X$ un aperto affine t.c. $U \cap Z \neq \emptyset$.

Allora $U \cap Z$ è aperto non $\emptyset$ in Z irrid

$\Rightarrow$ è irrid.

Inoltre: $U \cap Z$ è chiuso in U affine, ed è irrid. $\Rightarrow \exists\, z \in U \cap Z$ t.c. $U \cap Z = \overline{\{z\}}^U$

$\overset{U \cap Z \text{ denso in } Z}{\Rightarrow} Z = \overline{\{z\}}^X$.

Unicità: se $Z = \overline{\{z_2\}}$, allora $U \cap Z$ (aperto non $\emptyset$ ~~denso~~ in Z)

$\Rightarrow z_2 \in U \cap Z \Rightarrow U \cap Z = \overline{\{z_2\}}^U \Rightarrow$ basta ~~mostrare~~ l'unicità nel caso affine (~~che avevamo visto~~ fare per esercizio).

SOTTOSCHEMI CHIUSI

Vedremo che: dato uno schema X, un sottoschema chiuso di X determina un chiuso Z di X come spazio top. (è "supportato" in Z) ma più sottoschemi chiusi possono essere ~~stati~~ supportati nello stesso chiuso Z.

Procediamo in questo modo:

1) definiamo i sottoschemi chiusi di $\operatorname{Spec} R$ in termini di ideali di R
2) re-interpretiamo questa definizione in termini di fasci di ideali di $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}$
3) usiamo questa versione per dare la def. generale.

1) Consideriamo $X = \operatorname{Spec} R$ e I un ideale di R. Allora abbiamo visto che $\operatorname{Spec} \frac{R}{I}$ è omeomorfo al chiuso $V(I) \subset X$.

<u>Def</u> Un SOTTOSCHEMA CHIUSO di X è uno schema Y che è lo spettro di un anello quoziente di R.

- un sottoschema chiuso di uno schema affine è ancora uno schema affine
- i sottoschemi chiusi di X sono in corr. 1:1 con gli ideali di R
- l'inclusione $Y = \operatorname{Spec} \frac{R}{I} \hookrightarrow X = \operatorname{Spec} R$ corrisponde al morfismo quoziente $\pi: R \twoheadrightarrow \frac{R}{I}$,
- l'immagine insiemistica è $V(I) \subset X$.

Dati due sottoschemi chiusi $Y = \mathrm{Spec}\,\frac{R}{I}$ e $Z = \mathrm{Spec}\,\frac{R}{J}$ di $X = \mathrm{Spec}\,R$, diciamo che <u>Z è contenuto in Y</u> se ($\boxed{Z \subset Y}$)

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr] \arrow[dd, "\text{si fattorizza}"'] & \\ & X \\ Y \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \text{equival. se :} \qquad \begin{tikzcd} \frac{R}{J} & \\ & R \arrow[ul] \arrow[dl] \\ R/I \arrow[uu, dashed, "\text{si fatt.}"] & \end{tikzcd}$$

$\Longleftrightarrow \boxed{J \supset I}$.

Questo implica che $V(J) \subset V(I)$, ma il viceversa non è vero.

<u>Def</u> L'<u>unione</u> di due sottoschemi chiusi $\mathrm{Spec}\,\frac{R}{I}$ e $\mathrm{Spec}\,\frac{R}{J}$ è $\mathrm{Spec}\,\frac{R}{I \cap J}$. la loro

INTERSEZIONE è $\mathrm{Spec}\,\frac{R}{I+J}$.

(2) Da I a un fascio di ideali.

Oss. che un ideale I di R determina un <u>fascio di ideali</u> $\mathcal{I}$ in $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,R}$, definito sugli aperti principali come

$$\mathcal{I}(X_f) = \underbrace{I \cdot R_f}_{\text{ideale generato dall'imm di } I \text{ in } R_f} = I^e$$

Oss. che se $j : Y \hookrightarrow X$ è l'inclusione insiemistica di Y in X come chiuso $V(I)$, allora

$$j_* \mathcal{O}_Y \quad \text{fascio su } X$$

è l'estensione di $\mathcal{O}_Y$ a zero fuori da $V(I)$, ovvero $\forall U \subset X$ aperto

$$j_* \mathcal{O}_Y(U) = \mathcal{O}_Y(j^{-1}(U \cap V(I))).$$

Il precedente $R \twoheadrightarrow \frac{R}{I}$ determina un morfismo di fasci $Y \to X$ che è dato da $j : Y \hookrightarrow X$ e da un morfismo di fasci

$$\varphi : \mathcal{O}_X \longrightarrow j_* \mathcal{O}_Y$$

(che va pensato come "restrizione a Y").

Allora il <u>fascio di ideali $\mathcal{J}$ è il fascio nucleo di φ.</u>

$$0 \to \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow j_* \mathcal{O}_Y \to 0 \quad \text{succ. esatta di fasci su } X$$

~~[illegible]~~ come:

$$0 \to I \hookrightarrow R \twoheadrightarrow \frac{R}{I} \to 0.$$

Oss. ora che: non tutti i fasci di ideali di $\mathcal{O}_X$ provengono da ideali di R.

Es. $R = k[x]_{(x)}$ $\quad X = \operatorname{Spec} R = \{ [(0)], [(x)] \}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overset{\shortparallel}{a} \qquad \overset{\shortparallel}{b}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ pto chiuso $\quad$ pto chiuso

$\mathcal{O}(X) = R = k[x]_{(x)}$

$\mathcal{O}(\{a\}) = k(x)$

Definiamo un fascio di ideali $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}$ ponendo:

$\mathcal{I}(X) = \{0\}$, $\quad \mathcal{I}(\{a\}) = \mathcal{O}(\{a\}) = k(x)$.

Se $\mathcal{I}$ provenisse da un ideale $I \subset R$, dovrebbe essere $I = (0)$, ma allora avremmo anche $\mathcal{I}(\{a\}) = 0$ (verificare per es.!).

Def Sia $X = \operatorname{Spec} R$ uno schema affine. Un fascio di ideali $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ è detto QUASI COERENTE se è il fascio associato a un ideale $I \subset R$.

Avremo allora: $I = \mathcal{I}(X)$

e $\forall f \in R \quad \mathcal{I}(X_f) = I \cdot R_f \subset \underset{\underset{\mathcal{O}(X_f)}{\shortparallel}}{R_f}$

Def Sia X uno schema. Un fascio di ideali $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ è detto QUASI COERENTE se, per ogni aperto affine $U \subset X$, la restrizione $\mathcal{I}_{|U}$ è un fascio quasi coerente di ideali su U.