

## FOGLIO DI ESERCIZI II, PER IL 13.10.25

CINZIA CASAGRANDE E KARL CHRIST

**Esercizio 2.1.** Descrivere lo schema affine  $\text{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z]/(zx, zy))$ .

**Esercizio 2.2.** Sia  $\varphi: X = \text{Spec}(R) \rightarrow \text{Spec}(S) = Y$  un morfismo di schemi affini indotto dal morfismo di anelli  $\psi: S \rightarrow R$ .

- (1) Dimostrare che se  $\psi$  è suriettivo, allora  $\varphi$  è un omeomorfismo tra  $X$  e lo sottoschema chiuso  $\text{Spec}(S/\ker(\psi))$  di  $Y$ .
- (2) L'immagine di  $\varphi$  è denso in  $Y$  se e solo se  $\ker(\psi) \subset \mathcal{N}_S$ , dove  $\mathcal{N}_S$  denota il nilradicale di  $S$ .
- (3) Dare un esempio in cui  $\varphi$  non è suriettivo nonostante che  $\psi$  è iniettivo.

**Esercizio 2.3.** Un omeomorfismo di spazi topologici non è automaticamente un isomorfismo di schemi:

- (1) Sia  $\varphi: \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^2$  la mappa data da  $t \rightarrow (t^2, t^3)$ . Dimostrare che  $\varphi$  è un omeomorfismo di spazi topologici tra  $\mathbb{A}^1$  e l'immagine di  $\varphi$ ,  $\text{Spec}(k[s, t]/(s^3 - t^2))$ , ma che non sono isomorfi come schemi.
- (2) Sia  $p > 0$  la caratteristica di un campo algebricamente chiuso  $k$ . Dimostrare che  $\psi: \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^1, t \mapsto t^p$  è un omeomorfismo di spazi topologici ma non un isomorfismo di schemi (si chiama *morfismo di Frobenius*).

**Esercizio 2.4.** Siano  $X$  uno schema,  $U \subset X$  aperto, e  $f \in \mathcal{O}(U)$ . Mostrare che  $f$  è invertibile in  $\mathcal{O}(U)$  se e solo se  $f(x) \neq 0$  per ogni  $x \in U$ .

**Esercizio 2.5.** Siano  $R$  un dominio e  $\xi := [(0)] \in \text{Spec} R$  il punto generico. Mostrare che  $\mathcal{O}_\xi \cong k(\xi) \cong \text{Frac}(R)$ .

**Esercizio 2.6.** Sia  $X$  uno schema. Mostrare che il morfismo  $X \rightarrow \text{Spec} \mathbb{Z}$  associa ad ogni  $x$  l'ideale generato da  $\text{char}(k(x))$ , dove  $k(x)$  è il campo residuo di  $x$ .

**Esercizio 2.7.** Sia  $\varphi: R \rightarrow S$  un omomorfismo di anelli e  $f: X := \text{Spec}(S) \rightarrow Y := \text{Spec}(R)$  il morfismo di schemi associato. Mostrare che la chiusura in  $Y$  del sottoinsieme  $f(V(A))$  è  $V(\varphi^{-1}(A))$ , dove  $A \subset R$  è un sottoinsieme.