Oss. Anche che: non tutti i fasci di ideali di $\mathcal{O}_X$ provengono da ideali di R.

Es. $R = k[x]_{(x)}$ $\qquad X = \operatorname{Spec} R = \{ \underset{\substack{\parallel \\ a \\ \text{pto chiuso}}}{[(0)]}, \underset{\substack{\parallel \\ b \\ \text{pto chiuso}}}{[(x)]} \}$

$\mathcal{O}(X) = R = k[x]_{(x)}$

$\mathcal{O}(\{a\}) = k(x)$

Definiamo un fascio di ideali $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}$ ponendo:

$\mathcal{I}(X) = \{0\}$, $\qquad \mathcal{I}(\{a\}) = \mathcal{O}(\{a\}) = k(x)$.

Se $\mathcal{I}$ provenisse da un ideale $I \subset R$, dovrebbe essere $I = (0)$, ma allora avremmo anche $\mathcal{I}(\{a\}) = 0$ (verificare per es.!).

Def Sia $X = \operatorname{Spec} R$ uno schema affine. Un fascio di ideali $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ è detto QUASI COERENTE se è il fascio associato a un ideale $I \subset R$.

Avremo allora: $I = \mathcal{I}(X)$

e $\forall f \in R$ $\quad \mathcal{I}(X_f) = I \cdot R_f \subset \underset{\substack{\parallel \\ \mathcal{O}(X_f)}}{R_f}$

Def Sia X uno schema. Un fascio di ideali $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ è detto QUASI COERENTE se, per ogni aperto affine $U \subset X$, la restrizione $\mathcal{I}_{|U}$ è un fascio quasi coerente di ideali su U.

Esercizio Mostra che $\mathcal{I}$ è quasi coerente se $\exists\, X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ ricopr. aperto affine t.c. $\mathcal{I}_{|U_\alpha}$ è quasi coerente $\forall \alpha$.

Def Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno schema. Un SOTTOSCHEMA CHIUSO Y di X è uno schema $(Y, \mathcal{O}_Y)$ t.c.

- come spazi topologici: Y è un chiuso di X
- come fasci: $\exists\, \mathcal{I} = \mathcal{I}_{Y|X}$ fascio quasi coerente di ideali di $\mathcal{O}_X$ t.c.

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{Y|X} \hookrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow j_* \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

ovvero:

$\mathcal{O}_Y$ (o meglio $j_*\mathcal{O}_Y$) è il $\boxed{\text{fascio quoziente}}$ di $\mathcal{O}_X$ per $\mathcal{I}$.

- abbiamo quindi un morfismo di fasci $Y \to X$
- $\forall U \subset X$ aperto affine, $Y \cap U$ è il sottoschema chiuso associato all'ideale $\mathcal{I}(U) \subset \mathcal{O}_X(U)$

se $A \subset X$ è un aperto

- diciamo che $f \in \mathcal{O}_X(A)$ "SI ANNULLA SU Y" se $f \in \mathcal{I}(A)$.
- i sottoschemi chiusi di X sono in corr. 1:1 con i fasci quasi coerenti di ideali di $\mathcal{O}_X$

OSS Come fatto per R e per gli ideali $I \subset R$, dato un R-modulo M possiamo definire un fascio $\mathcal{M}$ di $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}$-moduli su Spec R (cioè: $\forall U$, $\mathcal{M}(U)$ è un $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(U)$-modulo)

ponendo, sugli aperti principali:

$$\mathcal{M}(X_f) = M_f$$

localizzazione di M rispetto a f
R_f-modulo

in particolare:

$$\mathcal{M}(X) = M.$$

Un tale fascio di $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}$-moduli è detto QUASI-COERENTE, e su uno schema X generale un fascio $\mathcal{F}$ di $\mathcal{O}_X$-moduli è detto quasi-coerente se lo è su ogni aperto affine.

Ricordiamo che se M è un R-modulo e $S \subset R$ è un insieme moltiplicativo, la localizzazione di M rispetto a S

$$S^{-1}M \quad \text{o} \quad M_S$$

si costruisce come le frazioni $\frac{m}{s}$ con $s \in S$

t.c. $\frac{m_1}{s_1} = \frac{m_2}{s_2}$ se $\exists t \in S$ t.c. $t(s_2 m_1 - s_1 m_2) = 0$ in M

- $S^{-1}M$ è un modulo su $S^{-1}R$
- $S^{-1}I = I \cdot R_S \rightsquigarrow M_f, M_{\mathfrak{p}}$.

Def Un sottoschema localmente chiuso di X è un sottoschema chiuso di un sottoschema aperto di X.

OSS Un morfismo di schemi $(f, f^\#): Y \to X$ è un' IMMERSIONE CHIUSA se identifica Y come sottoschema chiuso di X.

~~Deve essere: $\forall x \in X$ $\exists U$ intorno aperto affine di X t.c.~~

Def Uno schema X si dice RIDOTTO se il fascio $\mathcal{O}_X$ non ha nilpotenti.

Esercizi:

1) Sia $X = \operatorname{Spec} R$. Mostrare che X è ridotto $\iff$ R non ha nilpotenti.

2) Mostrare che sono equivalenti:
   (i) X è ridotto
   (ii) X ha un ricoprimento aperto affine $\{U_\alpha\}_\alpha$ t.c. $\mathcal{O}_X(U_\alpha)$ è senza nilpotenti $\forall \alpha$
   (iii) $\mathcal{O}_x$ è senza nilpotenti $\forall x \in X$.

In generale in ogni schema X possiamo definire un fascio di ideali dato dai nilpotenti:

$$\forall\, U \subset X \qquad \mathcal{N}(U) = \text{nilradicale di } \mathcal{O}_X(U)$$

Se X è affine, $X = \operatorname{Spec} R$, e $f \in R$; sia $\varphi : R \to R_f$

$$\cancel{N_{R_f} = \bigcap_{\substack{P \text{ primo} \\ \text{di } R_f}} P = \bigcap_{\substack{Q \text{ primo di } R \\ \text{t.c. } f \notin Q}} \left(\varphi(Q) \cdot R_f\right)}$$

~~Oss. che se Q è un primo di R t.c. $f \in Q$, allora $\varphi(Q) \cdot R_f = R_f$~~

$$\cancel{\Rightarrow N_{R_f} = \bigcap_{Q \text{ primo di } R} \left(\varphi(Q) \cdot R_f\right) =}$$

$=$

Sia $a \in N_R$. Allora $a^n = 0$ in R

$\Rightarrow \varphi(a)^n = 0$ in $R_f \Rightarrow \varphi(a) \in N_{R_f}$.

Viceversa, sia $\frac{b}{s} \in N_{R_f}$. Allora $\left(\frac{b}{s}\right)^n = 0$ in $R_f \Rightarrow \exists\, t \in S$ t.c. $t \cdot b^n = 0$ in R

$\Rightarrow t^{n-1} \cdot t b^n = 0$ in $R \Rightarrow (tb)^n = 0$ in R

$\Rightarrow tb \in N_R$ e $\frac{b}{s} = \frac{bt}{st} \in \langle \varphi(N_R) \rangle$.

$\Rightarrow N_{R_f} = N_R \cdot R_f \Rightarrow \mathcal{N}$ è il fascio quasi-coerente associato a N_R.

$\Rightarrow$ Su uno schema qualsiasi, $\mathcal{N}$ è un fascio quasi coerente di ideali.

Il sottoschema chiuso di X associato a $\mathcal{N}$ si dice SOTTOSCHEMA RIDOTTO ASSOCIATO a X e si denota con: X_{red}.

Si ha:
- X_{red} è omeomorfo a X come spazio topologico
- $\forall U$ aperto
$$\mathcal{O}_{X_{red}}(U) = \frac{\mathcal{O}_X(U)}{N_{\mathcal{O}_X(U)}}$$
- X_{red} è uno schema ridotto.

<u>OSS</u> Sia $X = \operatorname{Spec} R$ ridotto, e sia $f \in R$. Se f induce la funzione nulla su $\operatorname{Spec} R$, allora $f = 0$. Infatti: se $x = [\mathfrak{P}]$
$$f(x) = 0 \iff f \in \mathfrak{P}$$
e quindi: $f \in \mathfrak{P}$ $\forall \mathfrak{P}$ primo
$$\Rightarrow f \in N_R = (0) \Rightarrow f = 0.$$

<u>ESERCIZIO</u> Dedurre che: se X è uno schema ridotto, $U \subset X$ aperto, e $f \in \mathcal{O}(U)$, allora f è determinata

dalla funzione associata

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow \coprod_{x \in U} k(x) \\ x &\longmapsto f(x) \in k(x). \end{aligned}$$

ES $X = \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[x,y]/(y)$ asse x struttura ridotta

(esercizio: mostra che $X \cong \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$)

$Y = \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[x,y] / \underbrace{(x^2, xy, y^2, x+y)}$ supportato nell'origine, non ridotto

un polinomio f è in questo ideale $\iff$ $f(0,0)=0$ e il termine lineare è $\lambda(x+y)$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$Z = \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[x,y]/(x^2, xy, y^2, x+3y)$

$X \cup Y = X \cup Z = \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[x,y] / \underbrace{(xy, y^2)}$ supportato nell'asse x, non ridotto ("punto immerso" nell'origine)

intersezione dei due ideali

$X \cap Y : \quad (y, x^2, x+y) = (x,y)$ origine con struttura ridotta

$\parallel$

$X \cap Z$

ma: $Y \neq Z$

~~$(y) \cap (x^2, xy, y^2, x+y)$~~

~~contiene: (xy, y^2)~~

Controimmagini di sottoschemi chiusi, nel caso affine

Siano $\varphi : R \to S$ omo di anelli e

$f : X = \operatorname{Spec} B \to Y = \operatorname{Spec} R$ il morfismo di schemi associato.

Sia $Z = \operatorname{Spec} \frac{R}{I}$ sottoschema chiuso di Y, $I \subset R$ ideale.

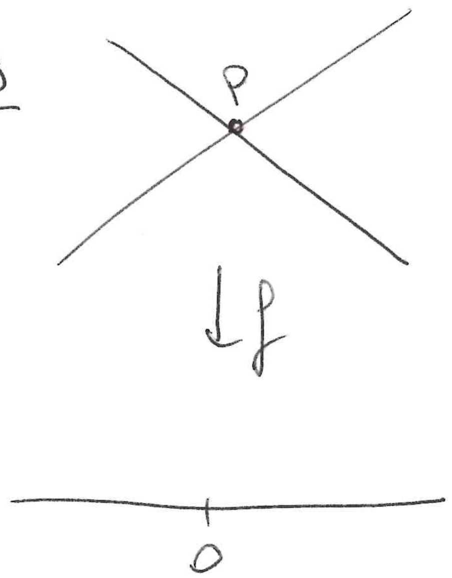
La CONTROIMMAGINE (SCHEMATICA) di Z è il sottoschema chiuso di X dato dall'ideale

$$\langle \varphi(I) \rangle \subset S.$$

In particolare: per ogni pto chiuso $y = [m] \in Y$, la FIBRA (SCHEMATICA) di f su y è

$$F_y = \operatorname{Spec} \frac{S}{\langle \varphi(m) \rangle}.$$

ES



$X = \operatorname{Spec} \frac{k[x,y]}{(xy)}$ $\quad P = [(x,y)]$

$Y = \mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec} k[t]$

Mappa: $\varphi : k[t] \to \frac{k[x,y]}{(xy)}$

$t \mapsto x+y$

Se $p = (a, 0) \longleftrightarrow m_p = (x-a, y)$ in $S = \frac{k[x,y]}{(xy)}$

$f(p) = ?$

Oss. che $\varphi^{-1}(m_p) = (t-a)$

infatti $\varphi(t-a) = x+y-a \in m_p$

$\rightsquigarrow f(p) = $ "a" in $\mathbb{A}^1_k$.

Vediamo le fibre sopra i punti della forma

$[(t-a)] \in \mathbb{A}^1_k$, con $t \in k$.

$\varphi(t-a) = x+y-a \qquad \pi : k[x,y] \twoheadrightarrow S$

$$\frac{S}{(\pi(x+y-a))} \cong \frac{k[x,y]/(x \cdot y)}{(x+y-a, xy)/(xy)} \cong \frac{k[x,y]}{(x+y-a, xy)}$$

$$\cong \frac{k[x,y]/(x+y-a)}{(x+y-a, xy)/(x+y-a)} \cong \frac{k[x]}{(x \cdot (a-x))}$$

$\to y = a - x$

$\rightsquigarrow f^{-1}(a) \cong \operatorname{Spec} \frac{k[x]}{(x \cdot (a-x))}$

<u>Se $a \neq 0$</u>: si tratta di un sottoschema ridotto, supportato su due punti.

<u>Se $a = 0$</u>: $\operatorname{Spec} \frac{k[x]}{(x^2)}$ 2 punti coincidenti

ES Sia $f: \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ morfismo indotto da $\varphi: k[x] \to k[x]$

$x \mapsto x^2$.

Descrivere le fibre di f nei pti $[(x-a)]$ $a \in k$.

Proprietà di finitezza

Def Uno schema X si dice NOETHERIANO se ha un ricoprimento finito di aperti affini U_i, $i=1,\dots,n$, t.c. $\mathcal{O}_X(U_i)$ è un anello noetheriano $\forall i=1,\dots,n$.

Prop Uno schema affine $X=\operatorname{Spec} R$ è noetheriano $\Leftrightarrow$ R è noetheriano.

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\boxed{\Leftarrow}$ ovvio

$\boxed{\Rightarrow}$ Sia $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ una catena ascendente di ideali di R.

Sia anche $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$

$U_j = \operatorname{Spec} R_j \quad R_j$ noetheriano

$$\rho^X_{U_j} : R \to R_j$$

e sia $I^{(j)}_i := \langle \rho^X_{U_j}(I_i) \rangle$ ideale di R_j

~~Dato che $R_1, \dots, R_n$ sono un~~

$\leadsto$ abbiamo una catena ascendente di ideali di R_j: $I^{(j)}_1 \subseteq I^{(j)}_2 \subseteq \dots$

e siccome abbiamo un numero finito di anelli noetheriani, $\exists r$ t.c. $I^{(j)}_r = I^{(j)}_m$ $\forall j$, $\forall m \geq r$.

Mostriamo che allora $I_r = I_m$ $\forall m \geq r$. (abbiamo già: $I_r \subseteq I_m$)

Sia $x \in X$ e $\rho^X_x : R \to \mathcal{O}_x$. Dato che $x \in U_j$ per qualche j, avremo

$$<\rho^X_x(I_r)> = <\rho^X_x(I_m)> \quad \text{in } O_x = R_P$$
$\forall m \geq r$. $\qquad$ se $x = [P]$

Sia $u \in I_m$. Allora

$$[u]_x \in <\rho^X_x(I_r)> = I_r \cdot R_P$$

$\Rightarrow \exists\ \bar{a}_x \in I_r,\ \bar{b}_x \in R \setminus P$ t.c.

$$[u]_x = \frac{(\bar{a}_x)}{(\bar{b}_x)}$$

$\Rightarrow \exists\ \tilde{b}_x \in R \setminus P$ t.c. $\tilde{b}_x(\bar{b}_x u - \bar{a}_x) = 0$ in R

$$\underbrace{(\tilde{b}_x \bar{b}_x)}_{\substack{\shortparallel \\ b_x \\ \notin P}} u - \underbrace{(\tilde{b}_x \bar{a}_x)}_{\substack{\shortparallel \\ a_x \in I_r}} = 0$$

$\Rightarrow b_x \cdot u \in I_r \ \forall x$.

$\rightsquigarrow$ per ogni primo P abbiamo $b_x \in R \setminus P$

$\Rightarrow (b_x)_x$ ideale di R che non può essere contenuto in nessun ideale massimale

$\Rightarrow (b_x)_x = (1) \Rightarrow \exists\ x_1, \dots, x_e \in X$ t.c.

$$1 = c_1 b_{x_1} + \dots + c_e b_{x_e} \qquad c_i \in R$$

$\Rightarrow u = c_1 b_{x_1} u + \dots + c_e b_{x_e} u \in I_r$.

<u>OSS</u> Se R è noetheriano, ogni località di R è noetheriana $\Rightarrow R_f$ è noetheriano, R_P noetheriano.