

ESEMPio DI IN COLLA MEMO:

4 le vite con due signori 4

$$\cancel{U_1} = \text{Spec } k[s] \quad U_2 = \text{Spec } k[t]$$

due copie della rete affine

$$U_{12} \subset \cancel{U_1} \cup U_1$$

$$U_{21} \subset U_R$$

$$(U_1)$$

april  
principali

$$(V_2)_t$$

$$D(U_2) = \text{Spec } k[x]_x = \text{Spec } k[x, x^{-1}]$$

$$U_{21} = \text{Spec } k[t, t^{-1}]$$

Sei  $\varphi: U_{12} \xrightarrow{\sim} U_{21}$   $\varphi$  is natural isom  
 dell'is  $n[t, t^{-1}] \rightarrow k[s, s^{-1}]$   
 $t \mapsto s$ .

Sea poi  $\gamma: U_{12} \xrightarrow{\sim} U_{21}$  l'iso invece dato da:

$$k[t, t^{-1}] \rightarrow k[s, s^{-1}]$$

$$t \mapsto \sigma^{-1}$$

• Sano:  $X$  lo schema ottenuto in collando  $U_1$  e  $U_2$  tramite  $\varphi$

$y$  и а - а и i , там же y.

Also auch,  $X = A_1 \cup A_2$   
 $Y = B_1 \cup B_2$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{nicht apert} \\ \cong A^1_k. \end{array} \right.$

Also:  $X$  e  $Y$  non sono 'simili'.

- $Y = \mathbb{P}^1_k$  (come vedremo tra un attimo)
- $X =$  rete con due superfici.

Scegliamo per entrambi i componenti del fascio strutturale.

Sia  $x \in O(X)$ . Allora:

$$x|_{A_1} = f \in O(A_1) = k[s]$$

$\swarrow$   
 $f(s)$

$$x|_{A_2} = g \in O(A_2) = k[t]$$

$\swarrow$   
 $g(t)$

che si devono restringere alle stesse cose in  $A_1 \cap A_2$  modulo l'isom.  $\varphi$

$$\Rightarrow f = g \Rightarrow O(X) \cong k[s]..$$

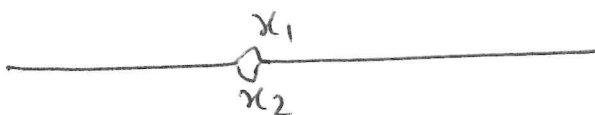
Oss. anche che:

Se  $U = A_1 \cap A_2$  in  $X$ , allora

$$A_1 = U \cup \{x_1\}$$

$$A_2 = U \cup \{x_2\}$$

$$X = U \cup \{x_1\} \cup \{x_2\} \quad \begin{matrix} \nearrow \text{pt. chiusi} \\ \searrow \text{(doppio} \\ \text{apice)} \end{matrix}$$



e abbiamo due morfismi di schemi

$$f: A^1 \rightarrow X$$

$$\text{dato da } A^1 \cong A'_1 \subset X$$

$$g: A^1 \rightarrow X$$

dato da  $A^1 \cong A_2 \hookrightarrow X$

f.c.  $f$  e  $g$  coincidono nell'aperto (denso)  
 $A^1 \setminus \{0\}$

$$\text{ma: } f(0) = x_1, \quad g(0) = x_2$$

→ vediamo che  $X$  è uno scheme

"non separato" (che con.  $\Rightarrow$  non Hausdorff)  
 negli scheme

(l'insieme dove  $f$  e  $g$  coincidono non  
 è un chiuso del loro dominio).

Tutte per  $\mathcal{O}$ :

&  $x \in \mathcal{O}(U)$ , allora

$$x|_{B_1} = f(0)$$

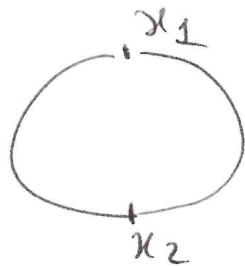
$$x|_{B_2} = f(1)$$

$$e: f(0) = g(1)$$

$\Rightarrow f, g$  costanti  $\Rightarrow x \in k$

$$\Rightarrow \mathcal{O}(U) = k$$

The effect:



# SPAZI PROIETTIVI

$R$  anello

$R[x_0, \dots, x_n]$

$$A = R[x_0, \dots, x_n]_{x_0 \dots x_n} = R[x_0, x_0^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$$

$\forall d \in \mathbb{Z}$  definiamo  $A^{(d)}$

$$R[x_0, \dots, x_n]$$

il sottogruppo additivo di  $A$  generato dai monomi "regolari"  $x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n}$  con  $i_0, \dots, i_n \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{j=0}^n i_j = d$$

Nota: il monomio si può anche scrivere come

$$\frac{x_0^{a_0} \dots x_n^{a_n}}{x_0^{b_0} \dots x_n^{b_n}}$$

$$\text{con } a_i \geq 0, b_i \geq 0$$

$$\sum a_j - \sum b_j = 0$$

$\leadsto$  Rendendo il denominatore comune, ogni elemento di  $A^{(d)}$  si scrive come

$$\frac{F(x_0, \dots, x_n)}{x_0^{b_0} \dots x_n^{b_n}}$$

$$\text{con } b_i \geq 0$$

$F$  omogeneo

$$\deg F - \sum b_j = d$$

Segue:

$$A^{(d)} \cdot A^{(e)} \subseteq A^{(d+e)}$$

$$A = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} A^{(d)}, \text{ infatti un elemento di } A \text{ si scrive come}$$

$$\frac{F(x_0, \dots, x_n)}{x_0^{b_0} \dots x_n^{b_n}} = \frac{F_{n+1} + \dots + F_0}{x_0^{b_0} \dots x_n^{b_n}} \quad b_i \geq 0$$

$F_i$  parti omogenee di grado  $i$

e:  $\deg \frac{F_i}{x_0^{b_0} \dots x_n^{b_n}} = i - \sum b_j$

no diciamo che l'anello  $A$  è graduato.

Oss  $A^{(0)}$  è un sottoanello di  $A$   
( $K$ -sottoalgebra)

ora definiamo, per  $i = 0, \dots, n$ :

$A_i$   $K$ -sottoalgebra di  $A^{(0)}$   
" "

$$\left\{ \frac{F(x_0, \dots, x_n)}{x_i^{\deg F}} \mid F \in R(x_0, \dots, x_n) \text{ omogeneo} \right\}$$

(ma anche  $i$ -esimo)

Abbiamo:  $A_i = R\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right] \subset A$

" "  $R[t_1, \dots, t_n]$  (tutti i suoi come  $R$ -algebra)

$$U_i = \text{Spec } A_i \cong \mathbb{A}_R^n$$

$\forall j \in \{0, \dots, n\}, j \neq i$ , abbiamo

$$U_{ij} = (U_i)_{t_j} \stackrel{\text{Spec}}{=} \left( R\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right]_{\frac{x_j}{x_i}} \right)$$

sono gli elementi di  $A^{(0)}$  con denominatore

della forma  $x_i^a x_j^b$

$\leadsto$  è uguale (dunque a  $A^{(0)}$ )  $a_j$ :

$$R \left[ \frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j} \right] \frac{x_i}{x_j} \circ$$

$\Rightarrow$  abbiamo un is. naturale

$$\varphi_{ij}: U_{ij} \xrightarrow{\sim} U_{ji} \quad \forall j \neq i$$

(che in effetti è l'identità).

$\leadsto$  abbiamo le condit. d'incollamento  
(convincerli per esercizio!).

$\leadsto$  incolliamo questi aperti a uno scheme

$\mathbb{P}_R^n$  spazio proiettivo  
sull'anello  $R$

che ha  $n+1$  aperti affini speciali

$$U_i \cong \mathbb{A}_R^n.$$

Oss  $\mathbb{A}_R^n$  e  $\mathbb{P}_R^n$  sono naturalmente schemi  
in  $R$ :

$$R \hookrightarrow R[x_0, \dots, x_n] \text{ induce } \mathbb{A}_R^n \rightarrow \text{Spec } R$$

e i morfismi  $U_i \rightarrow \text{Spec } R$  si incollano a  
un morfismo  $\mathbb{P}_R^n \rightarrow \text{Spec } R$

(gli ism.  $\varphi_{ij}$  commutano con il morfismo in  
 $\text{Spec } R$ , perché gli ism. di punti lasciano  
invariato il sottoinsieme di  $R$ ).

Def Ogni sottoschema (aperto, chiuso, locale, chiuso) di uno schema su  $R$  è ancora uno schema su  $R$ .

Teoremi:

1)  $X$  schema su  $R$

$X$  è di tipo finito su  $R$

$\iff X$  è cpo e  $\forall U \subset X$  aperto affine,

$\mathcal{O}(U)$  è una  $R$ -alg. f.g.

Esempio:  $X, Y$  schemi

$X = \{U_i\}$  ricop. aperto

Dare un morfismo

$f: X \rightarrow Y$  è equiv. a

dare morfismi  $f_i: U_i \rightarrow Y$   
 $\forall i, \text{ t.c. } f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \forall i, j$

2)  $X$  schema affine su  $R$

$X$  è di tipo finito su  $R \iff \mathcal{O}(X)$  è una  $R$ -alg. f.g.

3)  $X$  schema di tipo finito su  $R$

$\implies$  ogni sottoschema aperto (chiuso / loc. chiuso) di  $X$  è ancora di tipo finito su  $R$ .

Def Uno schema  $X$  si dice PROiettivo su  $R$  (QUASI-PROiettivo su  $R$ ) se è isomorfo a un sottoschema chiuso (loc. chiuso) di  $\mathbb{P}_R^n$ .

• Ogni schema q.p. su  $R$  è di tipo finito su  $R$ .

Oss Se  $X = \text{Spec } R$ , si verificano anche

$$P_X^u \quad \text{per} \quad P_R^u.$$

- Se  $p: X \rightarrow Y$  è un morfismo di schemi  
 $\begin{matrix} \text{Spec } R & & \text{Spec } S \end{matrix}$

$\hookrightarrow \varphi: S \rightarrow R$

usiamo  $\varphi$  per avere un morfismo di  
schemi

$$S[x_{1:n}, u] \rightarrow R[x_{1:n}, u]$$

$$\sim \mathcal{G} = \mathbb{A}_R^4 \rightarrow \mathbb{A}_S^4 = 0.$$

e poi lo moltiplichiamo per ottenere un morfismo

$$P_X^u \rightarrow P_Y^u.$$

• Se  $S$  è uno schema abeliano, possiamo scegliere un comp. aperto affine

$$S = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$$

$e$  ist eine  $\forall x$   $NP_x^4$

e 'incollare' per questi schemi fino ad ottenere:

$$IP_S^u$$

Lemma 1 Sia  $k$  un campo alg. chiuso e

$X$  uno schema di tipo finito su  $k$ .

Sia  $x \in X$ . Allora:

$x$  è chiuso  $\iff$  la mappa canonica  
in  $X$

$$k \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow k(x)$$

è suriettivo  
(base: è nulla).

Coroll  
~~Se  $U \subset X$  è un insieme aperto di  $x$ , allora  $x$  è chiuso in  $U$   $\iff$   $x$  è chiuso in  $X$ .~~

Dim Dobbiamo supporre  $X$  affine, i.e.  $X = \text{Spec } R$ ,

$R$   $k$ -algebra f.g.

$$x = [\mathcal{P}]$$

$$k \xrightarrow{\quad \varphi \quad} \frac{R}{\mathcal{P}} \hookrightarrow k(x)$$

Se  ~~$x$  è chiuso~~, allora la mappa  $\varphi$  è suriettiva, allora  
 $\frac{R}{\mathcal{P}}$  è un campo  $\implies \mathcal{P}$  è massimale  $\implies x$  è  
chiuso.

Viceversa: se  $x$  è chiuso,  $\mathcal{P}$  è massimale

e il fatto che  $\varphi$  sia sur. segue dal Nullstellensatz  
( $k$  alg. chiuso).  $\otimes$

Lemma 2 Sia  $k$  un campo alg. chiuso e

$X$  uno schema di tipo finito su  $k$ . Allora

i punti chiusi di  $X$  sono chiusi in ogni

subset insieme chiuso  $Y$  di  $X$ .

non  $\varphi$

$\varphi$

Dim Dobbiamo mostrare che ogni aperto  $U$  di ~~un chiuso~~  
contiene un pto chiuso. Sia  $U$  un aperto di  $X$

$$f \in U \cap Y \neq \emptyset.$$

Allora  $U \cap Y$  è chiuso in  $U$ .

$U \cap Y$  è uno schema; in particolare  $\exists y \in U \cap Y$  pto.

Sia  $V \subset \mathbb{A}^n$  un sotto-spazio affine  
 $\bullet \exists M \subset \mathcal{O}(V)$  massimale  
 $\Rightarrow \exists \mathfrak{p} \in V$  t.c.  $\mathfrak{p}$  è chiuso in  $V$   
 $\Rightarrow \mathfrak{p}$  è chiuso in  $\mathbb{A}^n \Rightarrow \mathfrak{p}$  è chiuso in  $U$   
 $\Rightarrow \mathfrak{p}$  è chiuso in  $X$ .

Varietà p.p. in un campo alg. chiuso e  
 schemi.  $k$  alg. chiuso

Sia  $X$  uno spazio affine. Possiamo associare  
 a  $X$  lo schema

$\text{Spec } k[X]$   
 affine, d'tipo finito /  $k$ ,  
 ridotto.

Oss. che i morfismi ( $n, k$ )

$X \rightarrow Y$  corrispondono agli omom. d' $k$ -algebra

$$k[Y] \rightarrow k[X]$$

che nel caso classico, che per gli schemi  
 non c'è un'equiv. di categorie:

varietà affini /  $k \longleftrightarrow$  schemi affini, ridotti,  
 d'tipo finito su  $k$ .

Sia ora  $X$  una varietà g.p. su  $k$  (nel senso  
 classico). Anche in questo caso possiamo  
 associare a  $X$  uno schema:

per  $X$  l'insieme dei punti ind. di  $X$

$$\sim X \subset X$$

Per ogni aperto  $U \subset X$ , sia

$$U^* = \{ \mathfrak{p} \in U \mid \mathfrak{p} \cap U \neq \emptyset \}.$$

$$\bullet U \subset U^*$$

$$U^* \cap X = U$$

$$\left( \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \right)^* = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}^*$$

$$(U_1 \cap U_2)^* = U_1^* \cap U_2^*$$

~ gli  $U^*$  definiscono una topol. su  $X$ , che è  
 ~ coincide alla top. di Zariski su  $X$ .

Definiamo poi un fascio di  $k$ -algebra:

$$\mathcal{O}_X(U^*) := k[U].$$

~  $(X, \mathcal{O}_X)$  è uno anello

e se  $U \subset X$  è un aperto affine, allora

$$(U^*, \mathcal{O}_{X|U^*}) \cong \text{Spec } k[U]$$

$\Rightarrow U^*$  è affine,  $X$  è uno schema.

Si può anche vedere che i morfismi di  
 schemi e i morfismi di varietà ~~coincide~~  
 si determinano a vicenda.

# Prodotto fibrato

Consideriamo prima il caso insiemistico.

Dati due insiemi  $X, Y$  e due funzioni

$$f: X \rightarrow S, g: Y \rightarrow S$$

il loro prodotto fibrato su  $S$  è

$$X \times_S Y = \{ (x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y) \}.$$

$$X \times_S Y \rightarrow Y$$

$$\downarrow \quad \cong \quad \downarrow g$$

$$X \xrightarrow{f} S$$

(proiezioni)

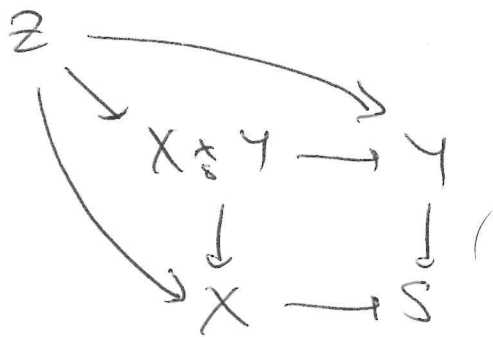
- Se  $S = \{pt\}$ , è il prodotto cartesiano
- Se  $f, g$  sono inclusioni di sottoinsiemi di  $S$ ,  $X \times_S Y$  è l'intersezione.
- Se  $f: X \hookrightarrow S$  è un'inclusione,  $X \times_S Y \cong g^{-1}(X)$ .
- Se  $X = Y$ :  $(X \times_S X)^{\Delta}$  è l'insieme ~~dipli~~  $\{(x, x) \mid x \in X\}$  su cui le mappe coincidono.

Oss. anche che  $X \times_S Y$  ha la proprietà universale:  
 $\forall$  insieme  $Z$  con mappe in  $X$  e  $Y$  che fanno commutare

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\beta} & Y \\ \alpha \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

$$\exists! Z \rightarrow X \times_S Y \quad \text{t.c.}$$

$$z \mapsto (\alpha(z), \beta(z))$$



unico e meno di  
is unico.

Def Il prodotto fibrato di schemi è il prodotto fibrato nella categoria degli schemi; definito a partire dalle proprietà universali

- Se esiste, il prodotto fibrato è unico.
- Mostriamo l'esistenza, definita nel caso affine.

Siano:  $X = \text{Spec } A$ ,  $Y = \text{Spec } B$ ,  $S = \text{Spec } R$



Oss. che il prodotto tensoriale, nella categoria degli anelli, ha le proprietà univ.-duali:



no posto definire:  $X \times_S Y := \text{Spec } (A \otimes_R B)$ .

ES. Ue:  $X$  è un sottoschema chiuso di  $S$   
 $\sim 1. A = \frac{R}{I}$

allora  $A \otimes_R B = \frac{R}{I} \otimes_R B = \frac{B}{I \cdot B}$

$\Rightarrow X \times_S Y = \text{Spec } \frac{B}{I \cdot B}$  sott. chiuso di  $Y$   
 coincide con l'immagine inversa  $f^{-1}$   
 definita.

ES Se  $f: A \rightarrow B$  omom. d'anelli  
 che induce  $f: X = \text{Spec } B \rightarrow Y = \text{Spec } A$ ,  
 allora:  $A_Y^Y = A_Y^Y \times_Y X$ .

Tuttavia:  $B[x_1, \dots, x_n] = B \otimes_A A[x_1, \dots, x_n]$ .

$\Rightarrow$  ogni spazio affine è un prodotto di  $A_Y^Y$ .

Costruiamo ora il prodotto fibrato in generale, usando gli involucri.

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ & \downarrow g & \text{spazio} \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

~~$X \in \mathcal{X} \subset Y \subset \mathcal{Y} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{W} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{S} = \{U_\alpha\}$~~   
 ricop. di aperti affini

e  $\forall \alpha$  scelto  $\left. \begin{array}{l} f^{-1}(U_\alpha) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_\alpha} A_{\alpha\lambda} \\ g^{-1}(U_\alpha) = \bigcup_{\beta \in \Gamma_\alpha} A_{\alpha\beta} \end{array} \right\} \text{open. affini}$