FOGLIO DI ESERCIZI III, PER IL 27.10.25

CINZIA CASAGRANDE E KARL CHRIST

Esercizio 3.1. Sia $X = \mathrm{Spec} R$ uno schema affine di tipo finito su un campo k.

(1) Dimostrare che se $U \subset X$ è aperto e X è irreducibile, allora $\dim(U) = \dim(X)$.
(2) Se $Y \subsetneq X$ è un sottoschema chiuso proprio, X è irreducibile e $\dim(X) < \infty$, allora $\dim(Y) < \dim(X)$.

Esercizio 3.2. Dato lo schema affine $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z]/(zx, zy))$, calcolarne la dimensione in ogni punto e determinarne i punti singolari.

Esercizio 3.3. Sia X uno schema noetheriano. Mostra che X ha dimensione 0 se e solo se è un'unione finita di punti.

Esercizio 3.4. Dimostrare che uno schema noetheriano di dimensione 0 è non-singolare se e solo se è un'unione finita di punti ridotti.

Esercizio 3.5. Sia $f \in \mathbb{C}[x, y] = R$ un polinomio e $\mathrm{Spec}(R/(f))$ il sottoschema chiuso di $\mathbb{A}^2$ corrispondente a f. Determinare i punti di $\mathbb{A}^2$, dove $\mathrm{Spec}(R/(f))$ è non-singolare nei seguenti casi:

(1) $f = x^2 - y$
(2) $f = y^2 - x^3 - x^2$

Esercizio 3.6. Sia $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ il morfismo di schemi affini indotto dal morfismo $k[x] \to k[x], x \mapsto x^2$ di anelli. Descrivere le fibre sui punti della forma $(x - a)$ con $a \in k$, come sottoschemi di $\mathbb{A}^1$.

Esercizio 3.7. Calcolare i seguenti prodotti fibrati di schemi e confrontarli con il prodotto fibrato dei insiemi:

(1) $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z}/(m)) \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} \mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z}/(n))$ per $m, n \in \mathbb{Z}$.
(2) $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}) \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{R})} \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$.
(3) $\mathrm{Spec}(R[x]) \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(R[y])$ per un anello R.

Esercizio 3.8. Si definisce il prodotto assoluto come $X \times Y = X \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} Y$. Controllare che per $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x])$ e $Y = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[y])$ abbiamo

$$\dim(X \times Y) = \dim(X) + \dim(Y) - 1.$$

Esercizi facoltativi, di tipo più teorico, dare la precedenza al primo gruppo di esercizi:

Esercizio 3.9. Sia k un campo algebricamente chiuso. Sia R un dominio d'integrità che sia anche una k-algebra finitamente generata. Allora la dimensione dello schema affine $\mathrm{Spec}(R)$ è uguale al grado di trascendenza di $\mathrm{Frac}(R)$ su k. (Per questo esercizio si devono usare fatti dall'algebra commutativa, come il lemma di normalizzazione di Noether)

Esercizio 3.10. Sia X uno schema e $\mathcal{I}$ un fascio di ideali di $\mathcal{O}_X$. Mostra che sono equivalenti:

(i) per ogni aperto affine $U \subset X$, la restrizione $\mathcal{I}_{|U}$ è un fascio quasi-coerente di ideali di $\mathcal{O}_U$ ($\mathcal{I}$ *è quasi-coerente*);
(ii) esiste un ricoprimento aperto affine $\{U_i\}_i$ di X tale che la restrizione $\mathcal{I}_{|U_i}$ sia un fascio quasi-coerente di ideali di $\mathcal{O}_{U_i}$, per ogni i.

Esercizio 3.11. Sia X uno schema. Mostra che sono equivalenti:

(i) il fascio $\mathcal{O}_X$ non ha nilpotenti (X *è ridotto*);
(ii) esiste un ricoprimento aperto affine $\{U_i\}_i$ di X tale che $\mathcal{O}_X(U_i)$ sia senza nilpotenti per ogni i;
(iii) $\mathcal{O}_{X,x}$ è senza nilpotenti per ogni $x \in X$.

Esercizio 3.12. Sia X uno schema noetheriano. Mostrare che X è uno spazio topologico noetheriano.

Esercizio 3.13. Sia X uno schema noetheriano. Ogni aperto di X è uno schema noetheriano.

Esercizio 3.14. Sia X uno schema su un anello R. Mostra che sono equivalenti:

(i) esiste un ricoprimento aperto affine, finito $X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ tale che $\mathcal{O}_X(U_i)$ sia una R-algebra finitamente generata per ogni $i = 1, \ldots, n$ (X *è di tipo finito su* R);
(ii) X è compatto e, per ogni aperto affine $U \subset X$, $\mathcal{O}_X(U)$ è una R-algebra finitamente generata.

Esercizio 3.15. Sia X uno schema di tipo finito su un anello R. Mostra che ogni sottoschema aperto / chiuso / localmente chiuso di X è ancora di tipo finito su R.