

Prodotto fibrato

Abbiamo visto come si definisce il prodotto fibrato di schemi affini:

$$X = \text{Spec } A, \quad Y = \text{Spec } B, \quad S = \text{Spec } R$$

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ & \downarrow & \\ X & \rightarrow & S \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} X \times_S Y \\ \cong \\ \text{Spec}(A \otimes_R B) \end{array}$$

$$\text{Spec}(A \otimes_R B).$$

Usando ricopimenti di aperti affini e gli incollamenti, costruiamo il prodotto fibrato in generale.
(non vediamo i dettagli).

Oss 1 Se $i: X \hookrightarrow S$ è un aperto allora l'inclusione di un aperto, allora anche $X \times_S Y \rightarrow Y$ è l'inclusione di un aperto, ed è esattamente $f^{-1}(U) \hookrightarrow Y$.

Dim È più dimensionale direttamente che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) & \rightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow f \\ U & \hookrightarrow & S \end{array}$$

ha la proprietà universale del prodotto fibrato (fare per esercizio).

Oss. 2 Se $i: X \hookrightarrow S$ è un immersione chiusa, cioè X è un sotto schema chiuso di S , allora anche $X \times_S Y \hookrightarrow Y$ è

un'immersione chiusa. Questo ci permette
di definire le costruzioni come
schemi del subschema chiuso

$$X \hookrightarrow S,$$

come $f^{-1}(X) := X \times_Y Y$

~ generalizziamo quanto fatto nel caso
affine

• Ricordiamo:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y \xrightarrow{f_*} \mathcal{O}_S \xrightarrow{\iota^\#} \mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

$$f^\# : \mathcal{O}_S \rightarrow f_* \mathcal{O}_Y$$

localmente: $f^\# : \mathcal{O}_S(U) \rightarrow \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U))$

Se $U \subset S$ è un aperto affine e

$V \subset Y$ è un aperto affine in $f^{-1}(U)$:

$$X_U := X \cap U \text{ sott. chiuso di } U$$

$$\text{Spec } \frac{B}{I \cdot B} \hookrightarrow V = \text{Spec } B$$

$$\downarrow$$

$$X_U \hookrightarrow U$$

$$\text{Spec } \frac{R}{I}$$

$$\text{Spec } R$$

$$B \otimes_R \frac{R}{I} = \frac{B}{I \cdot B} \leftarrow B$$

$$\uparrow$$

$$\frac{R}{I} \leftarrow R$$

$$\uparrow f^\#$$

$$R$$

DSS Sia X uno schema e $x \in X$ un punto.
Allora esiste sempre un morfismo di schemi

$$\text{Spec } k(x) \rightarrow X$$

be an imaginary instance of x
(NB $\text{Spec}(x)$ is an ω -pho).

Teilfall: Sei $X = \text{Spec } R$ affine: $x = [P]$

$$R \rightarrow \frac{R}{\mathfrak{p}} \hookrightarrow k(x)$$

of induce

$$f: K(x) \rightarrow X$$

$$\varphi^* = [(\circ)] \mapsto \varphi^{-1}((\circ)) = \mathcal{P}.$$

~~Wartezeit!
 & k è un campo
 polare, un
 monomio
 $\text{Spec } k \rightarrow X$
 individua un pt
 $x \in X$ t.c. $k(x) \hookrightarrow k$~~

The general:
barré powder
of x

$U \subset X$ intorno aperto affine

$$\text{Spec } K(X) \rightarrow U \hookrightarrow X$$

Sia ora K un campo qualsiasi,
e $f: \text{Spec } K \rightarrow X$ un morfismo.

f indolere in pto $x = f(p^t) \in X$

abbiamo inoltre un amo di quelli locali

$$\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec } k, \pi} = k$$

che passa al prossimo e induce

we also have $\psi: K(x) \hookrightarrow K$.

Abbiamo: f si fattorizza attraverso il
 morfismo $\text{Spec } k(x) \rightarrow X$.

In fatti, se X è affine; $X = \text{Spec } R$, $x = [\mathcal{O}]$:

$$\begin{array}{ccccc} R & \longrightarrow & \frac{R}{\mathcal{P}} & \hookrightarrow & k(x) \\ & \searrow f^\# & \downarrow \psi & \nearrow & \\ & & K & & \end{array}$$

$$f(\underbrace{[\mathcal{O}]}_{\mathcal{P}^\#}) = x = [\mathcal{O}] \iff (f^\#)^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{P}$$

e cioè $\mathcal{P} = \ker f^\#$

$\Rightarrow f^\#$ passa al quoziente
 e poi si estende
 a $k(x)$

$$\begin{array}{ccccc} R & \longrightarrow & R/\mathcal{P} & \hookrightarrow & k(x) \\ & \searrow f^\# & \downarrow & \nearrow \psi & \\ & & K & & \end{array}$$

Dettaglio: dare un morfismo
 $\text{Spec } K \rightarrow X$

è equivalente a :

- trovare un pto x
 t.c. K sia
 un'estensione di
 $k(x)$
- trovare un'immersione
 $k(x) \hookrightarrow K$
 ψ

Questo ci permette di definire, dato un
morphismo di schemi $f: X \rightarrow Y$,
la FIBRA di f su un qualsiasi pto
 $y \in Y$ (fibra schematica)

Come: $F_y := R(y) \times_{\mathcal{O}_Y} X$

$$\begin{array}{ccc} F_y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ R(y) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

- l'immagine di y in Y , insieme con $e^{-1}f^{-1}(y)$
- Se y è un pto chiuso, F_y è un sottoschema chiuso di Y e coincide con la controimmagine che abbiamo appena definito
- Se y non è un pto chiuso: F_y non è un sottoschema chiuso di Y , ma solo chiuso in $f^{-1}(\bar{y})$

ES

$$\mathbb{A}_k^2 \subseteq \mathbb{A}_k^1 \times_k \mathbb{A}_k^1$$

$$\mathbb{A}_{k(y)}^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}_k^1$$

$$(u, y) \mapsto x$$

$$\mathbb{A}_k^1$$

$$\downarrow \pi$$

$$\eta \mapsto \mathbb{A}_k^1$$

Considera $\eta = [(0)] \in \mathbb{A}^1$ pto generico
 allora $R(u) = \text{Frac } \mathbb{C}[x] = \mathbb{C}(u)$

$\Rightarrow$ la FIBRA AFFERITA F_η di π è

$$F_\eta = \text{Spec} \left(\mathbb{C}(u) \otimes_{\mathbb{C}(u)} \mathbb{C}(u, y) \right)$$

$$= \text{Spec} \left(\mathbb{C}(u)[y] \right) = \mathbb{A}_{\mathbb{C}(u)}^1$$

15 Nella categoria degli schemi su R , si
considera il prodotto su $\text{Spec } R$.

In particolare per $R = k$:

$$X \times_k Y = X \times_{\text{Spec } k} Y$$

per esempio:

$$A_k^2 = A_k^1 \times_k A_k^1.$$

• Se X, Y sono schemi di tipo finito su un
campo k , anche $X \times_k Y$ è uno schema
di tipo finito su k , e si può vedere che
anche $(X \times_k Y) = \dim X + \dim Y$.

Funttore dei punti.

Sia X uno scheme fisso.

Vogliamo pensare un pt^x di X come un morfismo $\text{Spec } k(\kappa) \rightarrow X$.

Più in generale, $\forall$ scheme Y vogliamo considerare

$$\text{Hom}(Y, X)$$

insieme dei
morfismi di
scheme $Y \rightarrow X$

e definire associando

$$\begin{array}{ccc} Y & \longmapsto & \text{Hom}(Y, X) \\ \text{scheme} & & \text{insieme} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} f: Y \rightarrow Z & \longmapsto & \left(\text{Hom}(Z, X) \rightarrow \text{Hom}(Y, X) \right) \\ \text{morfismo di} & & \alpha \mapsto \alpha \circ f \\ \text{scheme} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\alpha \circ f} & X \\ f \searrow & & \nearrow \alpha \\ & Z & \end{array}$$

Questo dà un funtore canonico

$$h_X: \text{Scheme} \rightarrow \text{Sets}$$

dato Funttore dei punti di X

Fatto: uno scheme è determinato, a meno di isomorfismi, dal suo funtore dei punti.

He: non tutti i punti conta.

$F: \text{Schemes} \rightarrow \text{Sets}$

Sono punti dei punti di uno scheme!
In tal caso si dice che il funtore F
è RAPPRESENTATO da uno scheme X .

• Se lavoriamo nella categoria degli scheme
su k , definiamo il funtore dei
punti su quella categoria.

• In generale si ha:

$$\text{Hom}(\text{Spec } k, X) = \left\{ \text{punti } x \in X + \begin{matrix} k[x] \hookrightarrow k \end{matrix} \right\}$$

!!

$X(k)$

k -punti di X

σ : punti " k -razionali".

• Se X è uno scheme finito su un campo
 k alg. chiuso:

$$X(k) = \{ \text{punti chiusi di } X \}.$$

(verificare per esercizio).

ES SCHEMI RIDOTTI SU CORPI NON ALG.
CHIVI.

Nullstellensatz: Sia k un campo e
 m un ideale massimale di $k[x_1, \dots, x_n]$.

~~Abbiamo~~

$\frac{k[x_1, \dots, x_n]}{m}$ è uno spazio vet. di
dimensione n su k .

$\leadsto$ se $p \in \mathbb{A}_k^n$ è un pto chiuso, allora

$k \hookrightarrow k(p)$ è un'estensione
algebrica

($\Rightarrow$ se k è alg. chiuso, allora $k(p) \cong k$ come
abbiamo visto).

ES $A^1_{\mathbb{R}}$ ha due tipi di pti diversi

$$\swarrow p = [m] \text{ con } m = (t-a), a \in \mathbb{R} \quad \sim R(p) = \mathbb{R}$$

$$\searrow p = [m] \text{ con } m = \underbrace{(t^2 + at + b)}_{a, b \in \mathbb{R}} \quad \sim R(p) = \mathbb{C}$$

(le due possibili estensioni
algebriche di $\mathbb{R}$) $\Delta < 0$

$$\mathbb{R}[x] \hookrightarrow \mathbb{C}[x] \quad \text{induce} \quad \pi: A^1_{\mathbb{C}} \rightarrow A^1_{\mathbb{R}}$$

• Se $q = (x - \lambda)_{\mathbb{C}[x]} \in A^1_{\mathbb{C}}$

$$\swarrow \lambda \in \mathbb{R}: \quad \pi(q) = (x - \lambda)_{\mathbb{C}[x]} \cap \mathbb{R}[x] = (x - \lambda)_{\mathbb{R}[x]}$$

$$\searrow \lambda \notin \mathbb{R}: \quad \pi(q) = (x - \lambda)_{\mathbb{C}[x]} \cap \mathbb{R}[x] \\ = ((x - \lambda) \cdot (x - \bar{\lambda}))_{\mathbb{R}[x]}$$

• Viceversa: se $p \in A^1_{\mathbb{R}}$

$$R(p) = \mathbb{R}, \quad p = (t - a)_{\mathbb{R}[x]}: \quad \pi^{-1}(p) = (t - a)_{\mathbb{C}[x]}$$

$$\swarrow R(p) = \mathbb{C}, \quad p = (t^2 + at + b)_{\mathbb{R}[x]}:$$

$$\pi^{-1}(p) \Leftrightarrow ((x - \lambda) \cdot (x - \bar{\lambda}))_{\mathbb{C}[x]}$$

$$\Leftrightarrow (x - \lambda) \cap (x - \bar{\lambda})$$

$$\Rightarrow \pi^{-1}(p) = \{ \lambda, \bar{\lambda} \} \quad \text{due pti} \\ \text{conjugate}$$

$$\underline{ES} \quad A_{\mathbb{R}}^2 = \text{Spec } \mathbb{R}(x, y)$$

Sia $p \in A_{\mathbb{R}}^2$ un pto chiuso, $p = [m]$.

allora $\mathbb{R} \subset k(p) \overset{\substack{= \mathbb{R}(x, y) \\ m}}{\subset} \mathbb{C}$

$$\Rightarrow k(p) \cong \begin{array}{c} \mathbb{R} \\ \diagdown \\ \mathbb{C} \end{array}$$

Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ le immagini di $x, y \in \mathbb{R}(x, y)$.

Se $k(p) \cong \mathbb{R}$, allora

$$m = (x - \lambda, y - \mu)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Se invece $k(p) = \mathbb{C}$: allora λ, μ non possono essere entrambi reali.

Supp. perche $x \in \mathbb{R} \sim x - \lambda \in m$

$\mu \in \mathbb{C}, \mu \notin \mathbb{R} \sim \mu \bar{\mu}$ radice di un pol.

ind. di $\mathbb{R}$ grado $y^2 + ay + b$ con $\Delta < 0$

$$\Rightarrow (x - \lambda, y^2 + ay + b) \subseteq m$$

~~max~~ maximale

$$\Rightarrow (x - \lambda, y^2 + ay + b) = m.$$

vediamo che p corrisponde
a: (λ, μ)
e: $(\lambda, \bar{\mu})$

Supp. ora λ, μ entrambi non reali.

Vogliamo avere un polinomio di I grado

a coeff. reali in x, y che si annulla in (λ, μ)

~~che~~ che in $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$

$$ax + by + c = 0$$

$$a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$0 = a\lambda + b\mu + c = a \operatorname{Re} \lambda + b \operatorname{Re} \mu + c$$

$$+ i (a \operatorname{Im} \lambda + b \operatorname{Im} \mu)$$

$$\Rightarrow \text{poniamo: } \begin{cases} a = \operatorname{Im} \mu \\ b = -\operatorname{Im} \lambda \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{si annulla} \\ \text{la parte imm.} \end{array} \right\}$$

$$c = -(\operatorname{Im} \mu \operatorname{Re} \lambda - \operatorname{Im} \lambda \operatorname{Re} \mu).$$

$$\Rightarrow ax + by + c \in M$$

Proviamo poi scegliere alcune un pol.
ind. $f \in R(x)$ d. π grado che si
annulla in λ

$$(f(x), ax + by + c) \subseteq M$$

alcune massimale

$$\Rightarrow M = (f(x), ax + by + c).$$

$$\text{quindi: } \frac{R[x, y]}{(f(x), ax + by + c)}$$

$$\begin{array}{ccc} A_{\mathbb{C}}^2 & \xrightarrow{\pi} & A_{\mathbb{R}}^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spec} \mathbb{C} & \rightarrow & \operatorname{Spec} \mathbb{R} \end{array}$$

stanno mandando

le fibre di π :

$$\pi^{-1}([m]) = V(\langle m \rangle)$$

$$\text{ideale prim. in } \mathbb{C}[x, y] \quad \stackrel{b \neq 0}{\cong} \quad \frac{R[x]}{(f(x))} \cong \mathbb{C}.$$

Oss. che in $\mathbb{C}^2$ questo ideale con. e
 (x, μ) e $(\bar{x}, \bar{\mu})$

mentre: (x, μ) e $(\bar{x}, \mu)$ con. e uno altro pto
d. $A_{\mathbb{R}}^2$

si ottengono altre in $\mathbb{C}^2$ per l'azione dell
congiugo (i.e. con. s.s. con i pti chiusi di
 $A_{\mathbb{R}}^2$).

I punti non chiusi di $A^2_{\mathbb{R}}$ sono:

(o) pts generici

$(f(x,y))$ con $f \in \mathbb{R}[x,y]$ irrid.

$\swarrow$ f irrid. in $\mathbb{C}[x,y]$ $\leadsto$ pt non chiuso di $A^2_{\mathbb{C}}$
 $\searrow$ f non irrid. in $\mathbb{C}[x,y]$ $\hat{=}$ riducibile:

$$f = g \cdot \bar{g} \quad g \text{ irrid. in } \mathbb{C}[x,y]$$

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$$

$$\text{Spec } \mathbb{C} \longrightarrow \text{Spec } \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{ccc} A^2_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\pi} & A^2_{\mathbb{R}} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \text{Spec } \mathbb{C} & \longrightarrow & \text{Spec } \mathbb{R} \end{array}$$

Se costruiamo
 più curve
 riducibili
 o irrid.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[x,y] & \xrightarrow{(f)} & A^2_{\mathbb{C}} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathbb{R}[x,y] & \xrightarrow{(f)} & A^2_{\mathbb{R}} \end{array}$$

("geometricamente irrid.")

Note:

$$\text{Spec } \frac{\mathbb{C}[x,y]}{(f)} = \text{Spec } \frac{\mathbb{R}[x,y]}{(f)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

Consideriamo

$$u = (x, y^2 + 1)$$

$$p = (u) \subset \mathbb{R}[x,y]$$

ESEMPIO: PUNTI DOPPI

$$X = \text{Spec } k(\varepsilon) / (\varepsilon^2)$$

scheme con due pt:

(0) $\leftarrow$ generico

(\varepsilon) $\leftarrow$ chiuso

Se vediamo X come sottoscheme di A_k^1 :

$$\varphi: k[x] \rightarrow \frac{k(\varepsilon)}{(\varepsilon^2)} =: R$$

$$x \mapsto \varepsilon$$

allora $\ker \varphi = (x^2)$

cioè una funzione $f \in \mathcal{O}(A^1)$ si annulla

in X se: $f(0) = 0$

$$\text{e: } f'(0) = 0.$$

Proviamo a fare lo stesso in A_k^2 . Vogliamo vedere X come sottoscheme ^{chiuso} di A^2 , ripetuto nell'origine.

Dobbiamo quindi dare

$$\varphi: k[x, y] \rightarrow R \text{ suriettivo,}$$

$$\text{t.c. } \ker \varphi \subseteq (x, y)^2$$

ideale dell'origine.

$$\text{Oss. che } (\varphi^{-1}(\varepsilon))^2 = \varphi^{-1}(\varepsilon^2) = 0$$

$$\Rightarrow (\varphi^{-1}(\varepsilon))^2 \in (x, y) \Rightarrow \varphi^{-1}(\varepsilon) \in \bigcap (x, y)$$

D'altronde

t.c. nella mappa indotta

$$\text{Spec } R \rightarrow A^2$$

il pto chiuso vuole nell'origine

$$\Rightarrow \varphi^{-1}(\epsilon) = (x, y) =: m$$

$$\Rightarrow \varphi(m) \subseteq (\epsilon)$$

$$\Rightarrow \varphi(m^2) \subseteq (\epsilon)^2 = 0$$

$$\text{car: } m^2 \subseteq \ker \varphi$$

$$(x^2, xy, y^2) \Rightarrow \varphi \text{ passe au quotient:}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{---} & R[x, y] & \xrightarrow{\varphi} R \\ & \searrow \downarrow \uparrow \varphi & \\ & \frac{R[x, y]}{(x^2, xy, y^2)} & \end{array}$$

Carre d'anneau rest. sur k : R est dim. 2 (base: $1, \epsilon$)

$\frac{R[x, y]}{m^2}$ est dim. 3 (gen. de $1, x, y$)

$$\Rightarrow \dim \ker \bar{\varphi} = 1 \quad \Rightarrow \text{Do not check } \varphi(x^2 + bx + cy) =$$

~~Linear form~~

me: $\bar{\varphi}$ mappe $1 \mapsto 1$

$$x \mapsto (\epsilon)$$

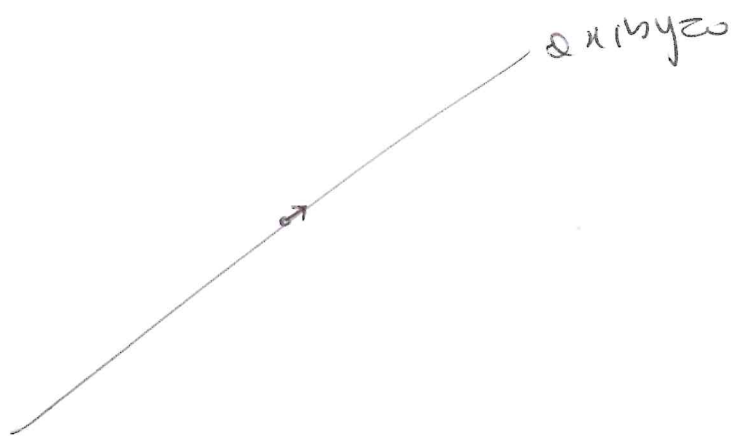
$$y \mapsto (\epsilon)$$

$\Rightarrow$ il n'y a pas de noyau de $\bar{\varphi}$ une forme lin. de $a\bar{x} + b\bar{y}$ car $a, b \in k$

$$\Rightarrow \ker \varphi = (x^2, xy, y^2, ax + by) \quad a, b \in k$$

$\Rightarrow$ obtenons le schéma

$$X_{a,b} := \text{Spec } \frac{k[x, y]}{(x^2, xy, y^2, ax + by)}$$



- $X_{a,b}$ è contenuto nella retta

$$ax+by=0$$

$$\text{Spec } \frac{k[x,y]}{ax+by}$$

- $f \in \mathcal{O}(A^2)$ si annulla su $X_{a,b}$

k

$$\text{Se } f(0,0)=0 \text{ e: } b \frac{\partial f}{\partial x} - a \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\text{allora: } f = \lambda (ax+by) + \text{termini d'ordine sup.}$$

Come vengono parametrizzati questi sottoschemi?

- Come intersecano d'ordine:

$$\text{Es } a=0, b=1$$

$$(y, x^2, xy, y^2) = (x^2, y)$$

Consideriamo la curva $C: y=x^2$

e la retta $L: y=0$

$$I(C) = (y-x^2), \quad I(L) = (y)$$

$$\textcircled{P} \quad I(C \cap L) = I(C) + I(L) = (y, x^2)$$