GEOMETRIA 5 - TEORIA DEI SCHEMI

CINZIA CASAGRANDE E KARL CHRIST

Contents

1. Schemi

1.1. Introduzione. Una varietà algebraica $X \subset k^m$ tradizionalmente è definito come il luogo di zeri di un insieme di polinomi $f_1, \ldots, f_n$ con m variabili e con coefficienti in un campo k (algebraicamente chiuso, di caratteristica 0).

Si vede subito, che X infatti non dipende dalla scelta di $f_1, \ldots, f_n$ ma invece dall ideale I generato dai f_i. Poi l'anello di funzioni regolari su X è, per definizione,

$$k[X] = k[x_1, \ldots, x_n]/I$$

, che sono 'polinomi' o funzioni regolari definito su X. Per avere una correspondenza biiettiva tra ideali e varieta algebriche, si deve imporre che $k[X]$ *è un dominio*: per esempio, il luogo di zeri di (y) e (y^2) è identico, anche se gli ideali non lo sono. Nella perspettiva classica, si risolve questa ambivalenza ristringendo l'insieme di ideali che sono ammessi. Nella perspettiva moderna degli schemi, si aumenta invece l'insiemme di oggetti geometrici – c'è si introduce un oggetto geometrico che corrisponde a (y^2) ed è diverso da (y).

Perché questo è utile anche se magari si è interessato sopratutto nelle varietà algebriche? Si consideri per esempio una degenerazione nel parametro t di una parabola, $xt - y^2 = 0$. Per $t \neq 0$, questo definisce una varietà algebrica. Per $t = 0$ invece otteniamo l'ideale (y^2) e quindi la teoria delle varietà algebriche ci dice di prendere il radicale e vederlo come la retta data da (y). Ma questo non dà una teoria soddisfacente; per esempio, il grado per $t \neq 0$ sarebbe uguale a 2, metre per $t = 0$ uguale a 1. La teoria dei schemi dà la possibilità di parlare in un senso formale anche dal oggetto geometrico associato a (y^2) (che dovrebbe essere una 'retta doppia').

Quindi, la teoria dei schemi introduce la possibilità di avere nilpotenti nel anello delle coordinati. Ma non solo, nel mondo dei schemi si puo per esempio anche lavorare su un anello (come $\mathbb{Z}$ con applicazioni alla teoria dei numeri) invece del campo k, o l'anello delle coordinati non è necessariamente finitamente generato come k-algebra.

Un'altro perspettiva che gli schemi offrono, è che permettono di definire 'varietà astratte' – invece delle varietà con un spazio ambientale come $\mathbb{A}^n_k$ o $\mathbb{P}^n_k$. Questo passo è analogo al concetto delle varietà astratte nella geometria differenziale: si ottiene l'oggetto astratto incollando aperti. Nel caso degli schemi, gli ogetti di base sono i schemi affini.

1.2. Definizione di Schemi. Uno schema affine è dato da

(1) $\mathrm{Spec}(R)$ con R anello commutativo con la topologia di Zariski e
(2) $\mathcal{O}$ fascio strutturale/fascio delle funzione regolare sullo schema.

Definiamo questo oggetto in tre passi, prima come insieme, poi come spazio topologico e finalmente come 'spazio localmente annellato', quindi lo fascio strutturale $\mathcal{O}$.

1.2.1. *Schemi affini come insieme.* Sia R un anello (assumiamo sempre che gli annelli sono commutativi con 1).

Definizione 1.1. Gli elementi di $\operatorname{Spec}(R)$ come insieme sono i ideali primi $\mathfrak{p}$ di R.

Osservazione 1.2. $R \subseteq R$ *non* è un ideale primo. $\{0\}$ invece lo è se R non ha divisori di zero (R è un dominio). Se R è un campo, l'unico ideale primo è $\{0\}$ perchè ogni elemento $x \neq 0$ è invertibile.

Un ideale primo $\mathfrak{m}$ è un ideale massimale se $\mathfrak{m}$ è massimale rispetto all'inclusione; c'è se $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}$ per un ideale primo $\mathfrak{p}$, allora $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$. Ogni ideale diverso da R è contenuto in un ideale massimale.

Osservazione 1.3. Un ideale $\mathfrak{p}$ è primo se e solo se $R/\mathfrak{p}$ è un dominio, e $\mathfrak{p}$ è massimale se e solo se $R/\mathfrak{p}$ è un campo.

Esempio 1.4.
1. $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) = \{(p) \mid p \text{ interi primi }\} \cup \{(0)\}$.
2. $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = \{(0)\}$ perchè $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ è un campo
3. $\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x]) = \{(x-\alpha \mid \alpha \in \mathbb{C}\} \cup \{(0)\}$. In questo caso, $\mathbb{C}[x]/(x-\alpha) \simeq \mathbb{C}$ via $f \mapsto f(\alpha)$. Quindi $(x-\alpha)$ è un ideale massimale. Poi tutti ideali primi hanno questa forma: Sia $\mathfrak{p} \neq (0)$ un ideale primo di $\mathbb{C}[x]$ e $f \in \mathfrak{p}$ un elemento di grado minimo. Allora f non è costante perchè altrimenti $\mathfrak{p} = \mathbb{C}[x]$. Se $\deg(f) > 1$, allora $f = c(x-\alpha_1) \cdot \ldots (x-\alpha_n)$ perché $\mathbb{C}$ è algebraicamente chiuso. Ma $\mathfrak{p}$ è primo e quindi deve contenere anche uno dei $(x-\alpha_i)$. Visto che $\mathbb{C}[x]$ è un dominio ad ideali principali (per esempio dovuto al fatto che esiste un algorithmo di divisione con resto), dobbiamo avere $\mathfrak{p} = (x-\alpha_i)$.

Dato $f \in R$ si può associare a f una 'funzione' $\overline{f}$ con dominio $\operatorname{Spec}(R)$ (vogliamo vedere i elementi in R come polinomi/funzioni regolari su $\operatorname{Spec}(R)$). Dato $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, consideriamo

$$\alpha \colon R \to R/\mathfrak{p} \hookrightarrow \operatorname{Frac}(R/\mathfrak{p}).$$

Allora, l'imagine di $\overline{\mathfrak{p}}$ sotto f è definito come $\alpha(f)$ e scriviamo $\overline{f}(\mathfrak{p})$.

Osservazione 1.5. Questo non definisce una vera funzione, perchè il codominio $\operatorname{Frac}(R/\mathfrak{p})$ cambia con $\mathfrak{p}$.

Esempio 1.6. $f = 15 \in \mathbb{Z}$. Allora il 'valore' di f a (7) per esempio è $15 \mod 7 = [1] \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Il 'valore' di f a (11) è $[4] \in \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Il 'valore' di f a (0) è $15 \in \mathbb{Q}$.

Esempio 1.7. $R = k[x]/(x^2)$, allora $\operatorname{Spec}(R) = \{(x)\}$. Il 'valore' di $f = x \in R$ sul unico punto (x) è zero. In particolare, dà una 'funzione' non-zero su $\operatorname{Spec}(R)$ che ha 'valore' zero a tutti i punti di $\operatorname{Spec}(R)$.

1.2.2. *Schemi affini come spazi topologici.* La *Topologia di Zariski* ha chiusi dato cosi: per ogni $S \subset R$, abbiamo un chiuso

$$V(S) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid S \subset \mathfrak{p}\}.$$

Osservazione 1.8. Otteniamo la stessa definizione scrivendo $V(S) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid \overline{f}(\mathfrak{p}) = 0\}$, che collega alla nozione più classico che i chiusi sono luoghi di zero di un insiemme di polinomi. Poi chiaramente $V(S) = V((S))$ dove (S) è l'ideale generato da S.

Proposizione 1.9. *Prendere i $V(I)$ per I ideali di R come chiusi definisce una topologia su* $\operatorname{Spec}(R)$ *(la topologia di Zariski).*

Proof. Controlliamo i requisiti per una topologia uno per uno:

- Ogni ideale contiene (0), quindi $V(0) = \operatorname{Spec}(R)$.
- Ogni ideale primo è proprio, quindi $V(R) = \emptyset$.

- Per un insieme di ideali $\{I_\alpha\}_\alpha$ abbiamo:

$$\mathfrak{p} \in \bigcap_\alpha V(I_\alpha) \Leftrightarrow I_\alpha \subseteq \mathfrak{p}, \forall \alpha \Leftrightarrow \bigcup_\alpha I_\alpha \subset \mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in V(\bigcup_\alpha I_\alpha)$$

- Per due ideali I e J abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \in V(I) \cup V(J) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{p} \in V(I) \text{ o } \mathfrak{p} \in V(J) \Leftrightarrow I \subset \mathfrak{p} \text{ o } J \subset \mathfrak{p} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad I \cap J \subset \mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in V(I \cap J), \end{aligned}$$

dove $I \cap J \subset \mathfrak{p} \Rightarrow I \subset \mathfrak{p}$ o $J \subset \mathfrak{p}$ perchè se non, esistono $i \in I$ e $j \in J$ con $i, j \notin \mathfrak{p}$. Ma in questo caso $ij \in I \cap J \subset \mathfrak{p}$ e quindi $i \in \mathfrak{p}$ o $j \in \mathfrak{p}$ perché $\mathfrak{p}$ è primo, una contradizione. □

Gli aperti sono i complementi dei chiusi. Se $S = \{f\}, f \in R$, allora

$$\operatorname{Spec}(R) \setminus V(f) = \operatorname{Spec}(R_f) = X_f,$$

dove $R_f = R[f^{-1}]$ è la localizzazione di R rispetto a f (c'è rispetto al insieme moltiplitivamente chiuso $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$):

Proposizione 1.10. *Gli ideali primi di R_f sono in corrispondenza biunico con i primi di R che non contengono f.*

Proof. Per passare da R a R_f si usano due costruzioni:

- $I \subset R$ ideale, allora $I^e = \{\frac{t}{f^n} \text{ per } t \in I\}$ l'ideale di R_f generato dall immagine di I con

$$\phi \colon R \to R_f, t \mapsto \frac{t}{1}.$$

  Si chiama la estensione di I (in R_f).
- $J \subset R_f$, $J^c = \phi^{-1}(J)$, la contrazione di J.

Per ogni ideale abbiamo che $I \subseteq (I^e)^c$ e $J = (J^c)^e$. Poi la contrazione di un ideale primo è sempre primo, perché la preimagine di un ideale primo tramite un morfismo tra anelli è primo.

Vogliamo dimostrare che per $\mathfrak{q} \subset R$ primo con $f \notin q$ abbiamo $\mathfrak{q} = (\mathfrak{q}^e)^c$ e che $\mathfrak{q}^e$ è primo (in generale, l'ideale generato dal immagine di un ideale primo non è necesseriamente un ideale primo). Così si vede che la corrispondenza biunica che cerchiamo è dato dalla estensione con inverso la contrazione (si osserva che per $f \in \mathfrak{q}$, la estensione di $\mathfrak{q}$ è R_f perché f diventa invertibile in R_f).

Entrambe le affermazioni sequono se dimostriamo che $\frac{x}{f^n} \in \mathfrak{q}^e$ implica che $x \in \mathfrak{q}$. Lo facciamo adesso: Sappiamo che $\frac{x}{f^n} \sim \frac{x'}{f^{n'}}$ per un $x' \in \mathfrak{q}$. Per definizione esiste un m t.c. $f^m(xf^{n'} - x'f^n) = 0$ e quindi $xf^{m+n'} = x'f^{m+n}$. Visto che $x' \in \mathfrak{q}$, anche $x'f^{m+n} \in \mathfrak{q}$ e quindi $xf^{m+n'} \in \mathfrak{q}$. Ma $f^{m+n'} \notin \mathfrak{q}$, e quindi $x \in \mathfrak{q}$ come desiderato. □

Lemma 1.11. *Gli X_f formano una base per la topologia di Zariski.*

Proof. Dobbiamo dimostrare che ogni aperto U di $\operatorname{Spec}(R)$ si può scrivere come unione di aperti X_f. Per definizione abbiamao $U = \operatorname{Spec}(R) \setminus V(S)$, che possiamo rescrivere come

$$U = \operatorname{Spec}(R) \setminus V(S) = \operatorname{Spec}(R) \setminus \bigcap_{f\in S} V(f) = \bigcup_{f\in S} (\operatorname{Spec}(R) \setminus V(f)) = \bigcup_{f\in S} X_f.$$

□

Gli aperti X_f si comportano bene anche per intersezioni finite:

Lemma 1.12. *Abbiamo $X_f \cap X_g = X_{fg}$.*

Proof. L'aperto X_f è l'insiemme di primi che non contengono f. Quindi $X_f \cap X_g$ è l'insieme di primi che non contengono f e non contengono g. L'insiemme X_{fg} invece sono gli ideali primi che non contengono fg e quindi che contengono né f né g. □

Osservazione 1.13. $\mathrm{Spec}(R)$ non è quasi mai di Hausdorff. Infatti, gli unici punti chiusi sono i ideali massimali perché se $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ la chiusura è

$$\overline{\mathfrak{p}} = \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\}.$$

Esempio 1.14. In $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x])$ i $\mathfrak{p} = (x - \alpha)$ sono punti chiusi. (0) non è chiuso e la sua chiusura è tutto $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x])$. Se $f \in \mathbb{C}[x]$, allora $V(f)$ sono tutti i punti $(x - \alpha)$ t.c. $(f) \subset (x - \alpha)$ che significa α tale che $f(\alpha) = 0$.

—

Lezione 22.9. …

2. Proprietà di morfismi

2.1. **Finitezza.** Il seguente concetto di finitezza è molto più restrittivo rispetto ad essere di tipo finito:

Definizione 2.1. Un morfismo di schemi $\varphi\colon X \to Y$ è finito se per ogni punto $y \in Y$ c'è un aperto affine $y \in V = \mathrm{Spec} B$ tale che anche $\varphi^{-1}(V) = \mathrm{Spec}(A)$ è affine e

$$\varphi_V^{\#}\colon B = \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}V) = A$$

realizza A come un modulo finitamente generato su B.

Al confronto di essere di tipo finito quindi richediamio quindi in particolare di essere finitamente generato come modulo, non solo come algebra.

Esempio 2.2. Il morfismo $\varphi\colon \mathrm{Spec}(k[x,y]/(x^2 - y)) \to \mathrm{Spec}(k[y])$ che corrisponde alla inclusione $k[y] \to k[x,y]/(x^2 - y), y \mapsto y$ è finito perchè $k[x,y]/(x^2 - y)$ è generato da 1 e x come $k[y]$-modulo.

Lemma 2.3. *Un morfismo finito ha fibre finite.*

Proof. La domanda è locale e quindi possiamo supporre che $Y = \mathrm{Spec}(B)$ e $X = \mathrm{Spec}(A)$ come nella definizione di essere finito. Assumiamo che A è un B-modulo finitamente generato e sia $y \in Y$. Allora la fibra $k(y) \otimes_B A$ di φ è un $k(y)$ modulo finitamente generato tramitte la mappa $B \to k(y)$. Ma ogni $k(y)$-algebra che è finitamente generato come $k(y)$-modulo ha un numero finito di primi (è Artiniano). □

Osservazione 2.4. Avere fibre finite (si dice anche di essere 'quasi-finito') non è sufficiente per essere un morfismo finito. Per esempio, l'inclusione $\varphi\colon \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \to \mathbb{A}^1$ è data dalla mappa di annelli $k[t] \to k[t, t^{-1}]$. Allora φ è iniettivo quindi quasi-finito, ma non finito perchè $k[t, t^{-1}]$ non è finitamente generato come $k[t]$ modulo.

Osservazione 2.5. Si nota che nelle definizioni di (localmente) di tipo finito e finito si richiede l'esistenza di un certo ricoprimento con aperti affini di Y. Si può dimostrare che questo implica le condizioni per *ogni* ricoprimento affine di Y.

2.2. **Morfismi separati.** Abbiamo visto che ogni schema affine noetheriano è quasicompatto. Ma questo proprietà non porta gli vantagi che ha in altre teorie. Per esempio che l'immagine di un morfismo definito sullo spazio è chiuso. Questo perchè uno schema affine è quasi mai Hausdorff e quindi quasi mai compatto: già per esempio $\mathbb{A}^1_k$ non lo è. I concetti di morfismi separati e propri danno un analogo di essere Hausdorff e compatto nella categoria degli schemi.

Si riccorda, che un spazio topologico X è Hausdorff se e solo se la diagonale Δ in $X \times X$ è chiuso nella topologia prodotto. Questo generalizza per gli schemi sustituendo la topologia prodotto con il prodotto fibrato.

Sia $\varphi\colon X \to S$ un morfismo tra schemi. La diagonale $\Delta \subset X \times_S X$ è il sottoschema definito su affini $\mathrm{Spec}(A) \subset X$ e $\mathrm{Spec}(B) \subset S$ con $\varphi|_{\mathrm{Spec}(A)}\colon \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(B)$ dal ideale generato da elementi

$$a \otimes 1 - 1 \otimes a \in A \otimes_B A.$$

Osservazione 2.6. Una definizione alternativa è: La diagonale è l'immagine del unico morfismo $X \to X \times_S X$ che composto con ognuno dei due proiezioni dà l'identitá su X (usando la proprietá universale del prodotto fibrato): l'identitá al livello di schemi corrisponde al identità al livello di anelli. Quindi cerchiamo una mappa $\mu\colon A \otimes_B A \to A$ tale che le composizioni con $A \to A \otimes_B A, a \mapsto 1 \otimes a$ e $A \to A \otimes_B A, a \mapsto 1 \otimes a$ danno l'identità. Dobbiamo avere $\mu(a \otimes b) = ab$ e si verifica che il nucleo di questa mappa è generato da elementi $a \otimes 1 - 1 \otimes a$

Definizione 2.7. Un morfismo $\alpha\colon X \to S$ si chiama separato se la diagonale $\Delta \subset X \times_S X$ è chiusa. Un S-schema X si chiama separato se lo morfismo strutturale $X \to S$ lo è.

Esempio 2.8. Se X e S sono affini, allora la diagonale è un sottoschema chiuso per definizione e quindi φ è separato.

Esempio 2.9. Sia X la 'rette affine con l'origine sdoppiata', c'è lo schema ottenuto incollando $X_1 = \operatorname{Spec}(k[t])$ e $X_2 = \operatorname{Spec}(k[s])$ tramitte il morfismo $k[t, t^{-1}] \to k[s, s^{-1}], t \mapsto s$ che identifica $X_1 \setminus \{0\}$ con $X_2 \setminus \{0\}$. Allora $X \times_k X$ ha un ricoprimento affine dato da $X_1 \times X_1, X_1 \times X_2, X_2 \times X_1$ e $X_2 \times X_2$ (quindi $\mathbb{A}^2$ con 'assi sdopiati' e 'quattro punti di origine'). La diagonale contiene le origini di $X_1 \times X_1$ e $X_2 \times X_2$ ma non quelle di $X_2 \times X_1$ e $X_1 \times X_2$. Fuori dal origine, gli $(X_i \setminus \{0\}) \times (X_i \setminus \{0\})$ vanno tutti identificati e la diagonale in ogni $(X_i \setminus \{0\}) \times (X_i \setminus \{0\})$ sono i punti (x, x). Quindi la diagonale in $X_2 \times X_1$ e $X_1 \times X_2$ non è chiusa e il morfismo non separato.

Commento 2.10. Si nota che essere separato è un concetto 'relativo'. La identitá $X \to X$ con X come nel esempio precedente è separato.

Si ricorda che un anello di valutazione è un anello in cui gli ideali sono totalmente ordinati (rispetto al'inclusione). Si dice che un anello locale B domina un altro anello local A se $A \subset B$ e $\mathfrak{m}_A = \mathfrak{m}_B \cap A$.

Teorema 2.11 (Criterio valutativo di separatezza)**.** *Sia $f\colon X \to S$ un morfismo tra schemi con X noeteriano. Allora f è separato se e solo se si è verificata la seguente condizione. Per ogni campo K e per ogni anello di valutazione R con campo quoziente K sia $T = \operatorname{Spec}(R)$, $U = \operatorname{Spec}(K)$ e $i\colon U \to T$ il morfismo indotto dall'inclusione $R \subset K$. Dato un morfismo da T a Y e un morfismo da U a X in modo tale che il seguente diagramma sia commutativo*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r] & S, \end{tikzcd} \tag{1}$$

esiste al più un morfismo $T \to X$ che ritiene commutativo il diagramma.

Osservazione 2.12. Se anche S è Noetheriano e f di tipo finito, basta controllare il criterio per ogni anello di valutazione *discreto* R.

Esercizio 2.13. *Sia R un anello di valutazione con campo di frazioni K. Sia $T = \operatorname{Spec}(R)$ e $U = \operatorname{Spec}(K)$. Dare un morfismo da U a uno schema X è la stessa cosa come dare un punto $x \in X$ e un'inclusione di campi $k(x) \hookrightarrow K$. Dare un morfismo da T in X è equivalente a dare due punti x, η in X con $x \in \overline{\eta}$ e un inclusione di campi $k(\eta) \subset K$ tale che R domina l'anello locale di x in $\overline{\eta}$.*

Proof. Supponiamo che f sia separato. Siano $h, h'\colon T \to X$ due morfismi come nel teorema. Allora h e h' definiscono un morfismo $h''\colon T \to X \times_S X$. Visto che $h|_U = h|_{U'}$ h e h' mandano il punto generico η di T nello stesso punto di X e quindi h'' manda il punto generico di T nella diagonale Δ di $X \times_S X$. Visto che Δ è chiusa, h'' manda anche il punto chiuso p nella diagonale. Quindi anche $h(p) = h'(p)$. Visto che h e h' definiscono – per assunzione – anche lo stesso inclusione di $k(h(\eta)) \subset K$, segue dal esercizio che $h = h'$.

Viceversa supponiamo che la condizione del criterio è soddisfatta e vogliamo dimostrare che la diagonale è chiusa. È sufficiente dimostrare: per ogni punto $\eta \in \Delta$ e $x \in \overline{\eta}$ abbiamo anche $x \in \Delta$ (si trova una dimostrazione per esempio in Hartshorne Lemma II.4.5). Sia $K = k(\eta)$ e $\mathcal{O}$ l'anello locale di x nello sottoschema $\overline{\eta}$ (con la struttura di schema ridotto). Allora $\mathcal{O}$ è un sotoanello locale di K e quindi esiste un anello di valutazione R di K che domina $\mathcal{O}$. Se mettiamo $T = \operatorname{Spec}(R)$ otteniamo usando l'esercizio un morfismo $T \to X \times_S X$ che manda il punto generico di T in η e il punto chiuso in x. Composizione con i due proiezioni dà due morfismi $T \to X$ che danno lo stesso morfismo a S e che coincidono su $\operatorname{Spec}(K)$. La condizione quindi da che i due morfismi coincidono. Quindi $T \to X \times_S X$ fatorizza attraverso il morfismo della diagonale $X \to X \times_S X$ e otteniamo che anche $x \in \Delta$. □

Corollario 2.14. *Supponiamo che tutti schemi sono noetheriani:*

(1) Inclusioni di sottoschemi sono separate.
(2) La composizione di due morfismi separati è separata.
(3) I morfismi separati sono stabili per cambiamento di base.
(4) Se $f\colon X \to Y$ e $f'\colon X' \to Y'$ sono morfismi separati di schemi su uno stesso schema di base S, allora il prodotto fibrato

$$f \times_S f'\colon X \times_S X' \to Y \times_S Y'$$

è separato.
(5) Se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ sono due morfismi di schemi e se $g \circ f$ è separato, allora anche f è separato.
(6) Un morfismo $f\colon X \to Y$ è separato se e solo se Y può essere ricoperto da sottoinsiemi aperti V_i tali che i morfismi $f^{-1}(V_i) \to V_i$ siano separati, per ogni i.

Proof. Per esempio, (2) si può verificare cosi: Sia $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ morfismi di schemi separati. Si considera

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[dd, "i"] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[d, "g"] \\ T \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

Una mappa $T \to X$ induce una mappa $T \to Y$ che è unica perchè g è separato. Ma anche una mappa $T \to X$ che commuta con $T \to Y$ è unica perchè f è separato, quindi $T \to X$ è unica e $g \circ f$ è separato. □

2.3. **Morfismi propri.** Uno dei proprietá più importante di spazzi compatti è che una mappa continua $X \to Y$ con X compatto (e Y Hausdroff) manda chiusi in chiusi. Si usa una versione di questo proprietá un po più forte per definire l'analogo nel mondo dei schemi:

Definizione 2.15. Un morfismo tra schemi $\varphi\colon X \to Y$ si chiama

(1) universalmente chiuso se per ogni morfismo $Y' \to Y$ il cambiamento di base $Y' \times_Y X \to Y'$ è chiuso.
(2) proprio se è di tipo finito, separato e universalmente chiuso.

Come prima, un S-schema X si chiama proprio se il morfismo strutturale $X \to S$ lo è.

Esempio 2.16. $\mathbb{A}^1_k$ non è proprio (su k). Il cambiamento di base dato da $\mathbb{A}^1_k \to \operatorname{Spec}(k)$ stesso dà la mappa $\mathbb{A}^1_k \times_k \mathbb{A}^1_k = \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^1_k$ che non è chiuso: l'immagine di $\operatorname{Spec}(k[x,y]/(xy-1))$ è $\mathbb{A}^1_k \setminus \{0\}$ non è chiuso (si deve aggiungere il punto 'a infinito', che faremmo nella sezione successiva).

—

Lezione 30.10.