

## FOGLIO DI ESERCIZI IV, PER IL 10.11.25

CINZIA CASAGRANDE E KARL CHRIST

**Esercizio 4.1.** Mostrare che in uno schema di tipo finito su un campo  $k$  i punti chiusi sono denso. Dare un esempio di uno schema non di tipo finito in cui non sono denso.

**Esercizio 4.2.** Dimostrare che immersioni chiuse sono stabili rispetto a cambiamenti di base: Se  $f: Y \rightarrow X$  è un'immersione chiusa, e  $X' \rightarrow X$  un morfismo qualsiasi, allora anche  $Y \times_X X' \rightarrow X'$  è un'immersione chiusa.

**Esercizio 4.3.** Si considera un campo  $k$  e la mappa  $f: \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \text{Speck}$  ottenuta incollando le mappe indotte da  $k \rightarrow k[x]$  sugli aperti affini. Dimostrare che  $f$  è propria.

**Esercizio 4.4.** Mostrare che un morfismo finito è proprio.

**Esercizio 4.5.** Siano  $X \rightarrow S, Y \rightarrow S$  schemi su  $S$  con  $X$  ridotto e  $Y \rightarrow S$  separato. Siano  $f, g: X \rightarrow Y$  morfismi che coincidono su un aperto denso di  $X$ . Dimostrare che allora  $f = g$ . Dare esempi in cui la conclusione non è vero in caso che (1)  $X$  non è ridotto e (2)  $Y \rightarrow S$  non è separato.

**Esercizio 4.6.** Sia  $X \rightarrow S$  separato con  $S$  affine e  $U, V \subset X$  affini. Dimostrare che allora anche  $U \cap V$  è affine. Dare un esempio con  $X \rightarrow S$  non-separato, in cui la conclusione non è vero.

**Esercizio 4.7.** Dimostrare che  $\text{Proj}(S) = \emptyset$  se e solo se tutti gli elementi in  $S_+$  sono nilpotenti.

**Esercizio 4.8.** Descrivere  $\text{Proj}(k[x, y])$  dove  $k[x, y]$  ha la graduazione triviale, c'è tutti elementi hanno grado 0.