GEOMETRIA 5 - TEORIA DEI SCHEMI

CINZIA CASAGRANDE E KARL CHRIST

Contents

1. Schemi

1.1. **Introduzione.** Una varietà algebraica $X \subset k^m$ tradizionalmente è definito come il luogo di zeri di un insieme di polinomi $f_1, \ldots, f_n$ con m variabili e con coefficienti in un campo k (algebraicamente chiuso, di caratteristica 0).

Si vede subito, che X infatti non dipende dalla scelta di $f_1, \ldots, f_n$ ma invece dall ideale I generato dai f_i. Poi l'anello di funzioni regolari su X è, per definizione,

$$k[X] = k[x_1, \ldots, x_n]/I$$

, che sono 'polinomi' o funzioni regolari definito su X. Per avere una correspondenza biiettiva tra ideali e varieta algebriche, si deve imporre che $k[X]$ *è un dominio*: per esempio, il luogo di zeri di (y) e (y^2) è identico, anche se gli ideali non lo sono. Nella perspettiva classica, si risolve questa ambivalenza ristringendo l'insieme di ideali che sono ammessi. Nella perspettiva moderna degli schemi, si aumenta invece l'insiemme di oggetti geometrici – c'è si introduce un oggetto geometrico che corrisponde a (y^2) ed è diverso da (y).

Perché questo è utile anche se magari si è interessato sopratutto nelle varietà algebriche? Si consideri per esempio una degenerazione nel parametro t di una parabola, $xt - y^2 = 0$. Per $t \neq 0$, questo definisce una varietà algebrica. Per $t = 0$ invece otteniamo l'ideale (y^2) e quindi la teoria delle varietà algebriche ci dice di prendere il radicale e vederlo come la retta data da (y). Ma questo non dà una teoria soddisfacente; per esempio, il grado per $t \neq 0$ sarebbe uguale a 2, metre per $t = 0$ uguale a 1. La teoria dei schemi dà la possibilità di parlare in un senso formale anche dal oggetto geometrico associato a (y^2) (che dovrebbe essere una 'retta doppia').

Quindi, la teoria dei schemi introduce la possibilità di avere nilpotenti nel anello delle coordinati. Ma non solo, nel mondo dei schemi si puo per esempio anche lavorare su un anello (come $\mathbb{Z}$ con applicazioni alla teoria dei numeri) invece del campo k, o l'anello delle coordinati non è necessariamente finitamente generato come k-algebra.

Un'altro perspettiva che gli schemi offrono, è che permettono di definire 'varietà astratte' – invece delle varietà con un spazio ambientale come $\mathbb{A}^n_k$ o $\mathbb{P}^n_k$. Questo passo è analogo al concetto delle varietà astratte nella geometria differenziale: si ottiene l'oggetto astratto incollando aperti. Nel caso degli schemi, gli ogetti di base sono i schemi affini.

1.2. **Definizione di Schemi.** Uno schema affine è dato da

(1) $\mathrm{Spec}(R)$ con R anello commutativo con la topologia di Zariski e
(2) $\mathcal{O}$ fascio strutturale/fascio delle funzione regolare sullo schema.

Definiamo questo oggetto in tre passi, prima come insieme, poi come spazio topologico e finalmente come 'spazio localmente annellato', quindi lo fascio strutturale $\mathcal{O}$.

1.2.1. *Schemi affini come insieme.* Sia R un anello (assumiamo sempre che gli annelli sono commutativi con 1).

Definizione 1.1. Gli elementi di $\mathrm{Spec}(R)$ come insieme sono i ideali primi $\mathfrak{p}$ di R.

Osservazione 1.2. $R \subseteq R$ *non* è un ideale primo. $\{0\}$ invece lo è se R non ha divisori di zero (R è un dominio). Se R è un campo, l'unico ideale primo è $\{0\}$ perchè ogni elemento $x \neq 0$ è invertibile.

Un ideale primo $\mathfrak{m}$ è un ideale massimale se $\mathfrak{m}$ è massimale rispetto all'inclusione; c'è se $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}$ per un ideale primo $\mathfrak{p}$, allora $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$. Ogni ideale diverso da R è contenuto in un ideale massimale.

Osservazione 1.3. Un ideale $\mathfrak{p}$ è primo se e solo se $R/\mathfrak{p}$ è un dominio, e $\mathfrak{p}$ è massimale se e solo se $R/\mathfrak{p}$ è un campo.

Esempio 1.4. (1) $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) = \{(p) \mid p \text{ interi primi }\} \cup \{(0)\}$.
(2) $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = \{(0)\}$ perchè $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ è un campo
(3) $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x]) = \{(x-\alpha \mid \alpha \in \mathbb{C}\} \cup \{(0)\}$. In questo caso, $\mathbb{C}[x]/(x-\alpha) \simeq \mathbb{C}$ via $f \mapsto f(\alpha)$. Quindi $(x-\alpha)$ è un ideale massimale. Poi tutti ideali primi hanno questa forma: Sia $\mathfrak{p} \neq (0)$ un ideale primo di $\mathbb{C}[x]$ e $f \in \mathfrak{p}$ un elemento di grado minimo. Allora f non è costante perchè altrimenti $\mathfrak{p} = \mathbb{C}[x]$. Se $\deg(f) > 1$, allora $f = c(x-\alpha_1) \cdot \ldots (x-\alpha_n)$ perché $\mathbb{C}$ è algebraicamente chiuso. Ma $\mathfrak{p}$ è primo e quindi deve contenere anche uno dei $(x-\alpha_i)$. Visto che $\mathbb{C}[x]$ è un dominio ad ideali principali (per esempio dovuto al fatto che esiste un algorithmo di divisione con resto), dobbiamo avere $\mathfrak{p} = (x-\alpha_i)$.

Dato $f \in R$ si può associare a f una 'funzione' $\overline{f}$ con dominio $\mathrm{Spec}(R)$ (vogliamo vedere i elementi in R come polinomi/funzioni regolari su $\mathrm{Spec}(R)$). Dato $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, consideriamo

$$\alpha\colon R \to R/\mathfrak{p} \hookrightarrow \mathrm{Frac}(R/\mathfrak{p}).$$

Allora, l'imagine di $\overline{\mathfrak{p}}$ sotto f è definito come $\alpha(f)$ e scriviamo $\overline{f}(\mathfrak{p})$.

Osservazione 1.5. Questo non definisce una vera funzione, perchè il codominio $\mathrm{Frac}(R/\mathfrak{p})$ cambia con $\mathfrak{p}$.

Esempio 1.6. $f = 15 \in \mathbb{Z}$. Allora il 'valore' di f a (7) per esempio è $15 \mod 7 = [1] \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Il 'valore' di f a (11) è $[4] \in \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Il 'valore' di f a (0) è $15 \in \mathbb{Q}$.

Esempio 1.7. $R = k[x]/(x^2)$, allora $\mathrm{Spec}(R) = \{(x)\}$. Il 'valore' di $f = x \in R$ sul unico punto (x) è zero. In particolare, dà una 'funzione' non-zero su $\mathrm{Spec}(R)$ che ha 'valore' zero a tutti i punti di $\mathrm{Spec}(R)$.

1.2.2. *Schemi affini come spazi topologici.* La *Topologia di Zariski* ha chiusi dato cosi: per ogni $S \subset R$, abbiamo un chiuso

$$V(S) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid S \subset \mathfrak{p}\}.$$

Osservazione 1.8. Otteniamo la stessa definizione scrivendo $V(S) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \overline{f}(\mathfrak{p}) = 0\}$, che collega alla nozione più classico che i chiusi sono luoghi di zero di un insiemme di polinomi. Poi chiaramente $V(S) = V((S))$ dove (S) è l'ideale generato da S.

Proposizione 1.9. *Prendere i $V(I)$ per I ideali di R come chiusi definisce una topologia su* $\operatorname{Spec}(R)$ *(la topologia di Zariski).*

Proof. Controlliamo i requisiti per una topologia uno per uno:

- Ogni ideale contiene (0), quindi $V(0) = \operatorname{Spec}(R)$.
- Ogni ideale primo è proprio, quindi $V(R) = \emptyset$.
- Per un insieme di ideali $\{I_\alpha\}_\alpha$ abbiamo:
$$\mathfrak{p} \in \bigcap_\alpha V(I_\alpha) \Leftrightarrow I_\alpha \subseteq \mathfrak{p}, \forall \alpha \Leftrightarrow \bigcup_\alpha I_\alpha \subset \mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in V(\bigcup_\alpha I_\alpha)$$
- Per due ideali I e J abbiamo:
$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \in V(I) \cup V(J) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{p} \in V(I) \text{ o } \mathfrak{p} \in V(J) \Leftrightarrow I \subset \mathfrak{p} \text{ o } J \subset \mathfrak{p} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad I \cap J \subset \mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in V(I \cap J), \end{aligned}$$
dove $I \cap J \subset \mathfrak{p} \Rightarrow I \subset \mathfrak{p}$ o $J \subset \mathfrak{p}$ perchè se non, esistono $i \in I$ e $j \in J$ con $i, j \notin \mathfrak{p}$. Ma in questo caso $ij \in I \cap J \subset \mathfrak{p}$ e quindi $i \in \mathfrak{p}$ o $j \in \mathfrak{p}$ perché $\mathfrak{p}$ è primo, una contradizione.

$\square$

Gli aperti sono i complementi dei chiusi. Se $S = \{f\}, f \in R$, allora
$$\operatorname{Spec}(R) \setminus V(f) = \operatorname{Spec}(R_f) = X_f,$$
dove $R_f = R[f^{-1}]$ è la localizzazione di R rispetto a f (c'è rispetto al insieme moltiplitivamente chiuso $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$):

Proposizione 1.10. *Gli ideali primi di R_f sono in corrispondenza biunico con i primi di R che non contengono f.*

Proof. Per passare da R a R_f si usano due costruzioni:

- $I \subset R$ ideale, allora $I^e = \{\frac{t}{f^n}$ per $t \in I\}$ l'ideale di R_f generato dall immagine di I con
$$\phi\colon R \to R_f, t \mapsto \frac{t}{1}.$$
Si chiama la estensione di I (in R_f).
- $J \subset R_f, J^c = \phi^{-1}(J)$, la contrazione di J.

Per ogni ideale abbiamo che $I \subseteq (I^e)^c$ e $J = (J^c)^e$. Poi la contrazione di un ideale primo è sempre primo, perché la preimagine di un ideale primo tramite un morfismo tra anelli è primo.

Vogliamo dimostrare che per $\mathfrak{q} \subset R$ primo con $f \notin q$ abbiamo $\mathfrak{q} = (\mathfrak{q}^e)^c$ e che $\mathfrak{q}^e$ è primo (in generale, l'ideale generato dal immagine di un ideale primo non è necesseriamente un ideale primo). Così si vede che la corrispondenza biunica che cerchiamo è dato dalla estensione con inverso la contrazione (si osserva che per $f \in \mathfrak{q}$, la estensione di $\mathfrak{q}$ è R_f perché f diventa invertibile in R_f).

Entrambe le affermazioni sequono se dimostriamo che $\frac{x}{f^n} \in \mathfrak{q}^e$ implica che $x \in \mathfrak{q}$. Lo facciamo adesso: Sappiamo che $\frac{x}{f^n} \sim \frac{x'}{f^{n'}}$ per un $x' \in \mathfrak{q}$. Per definizione esiste un m t.c. $f^m(xf^{n'} - x'f^n) = 0$ e quindi $xf^{m+n'} = x'f^{m+n}$. Visto che $x' \in \mathfrak{q}$, anche $x'f^{m+n} \in \mathfrak{q}$ e quindi $xf^{m+n'} \in \mathfrak{q}$. Ma $f^{m+n'} \notin \mathfrak{q}$, e quindi $x \in \mathfrak{q}$ come desiderato. $\square$

Lemma 1.11. *Gli X_f formano una base per la topologia di Zariski.*

Proof. Dobbiamo dimostrare che ogni aperto U di $\operatorname{Spec}(R)$ si può scrivere come unione di aperti X_f. Per definizione abbiamao $U = \operatorname{Spec}(R) \setminus V(S)$, che possiamo rescrivere come
$$U = \operatorname{Spec}(R) \setminus V(S) = \operatorname{Spec}(R) \setminus \bigcap_{f\in S} V(f) = \bigcup_{f\in S} (\operatorname{Spec}(R) \setminus V(f)) = \bigcup_{f\in S} X_f.$$

$\square$

Gli aperti X_f si comportano bene anche per intersezioni finite:

Lemma 1.12. *Abbiamo $X_f \cap X_g = X_{fg}$.*

Proof. L'aperto X_f è l'insiemme di primi che non contengono f. Quindi $X_f \cap X_g$ è l'insieme di primi che non contengono f e non contengono g. L'insiemme X_{fg} invece sono gli ideali primi che non contengono fg e quindi che contengono né f né g. □

Osservazione 1.13. Spec(R) non è quasi mai di Hausdorff. Infatti, gli unici punti chiusi sono i ideali massimali perché se $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ la chiusura è

$$\overline{\mathfrak{p}} = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\}.$$

Esempio 1.14. In $\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x])$ i $\mathfrak{p} = (x - \alpha)$ sono punti chiusi. (0) non è chiuso e la sua chiusura è tutto $\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x])$. Se $f \in \mathbb{C}[x]$, allora $V(f)$ sono tutti i punti $(x - \alpha)$ t.c. $(f) \subset (x - \alpha)$ che significa α tale che $f(\alpha) = 0$.

—

Lezione 22.9. …

2. Proprietà di morfismi

2.1. **Finitezza.** Il seguente concetto di finitezza è molto più restrittivo rispetto ad essere di tipo finito:

Definizione 2.1. Un morfismo di schemi $\varphi \colon X \to Y$ è finito se per ogni punto $y \in Y$ c'è un aperto affine $y \in V = \operatorname{Spec} B$ tale che anche $\varphi^{-1}(V) = \operatorname{Spec}(A)$ è affine e

$$\varphi_V^{\#} \colon B = \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}V) = A$$

realizza A come un modulo finitamente generato su B.

Al confronto di essere di tipo finito quindi richediamio quindi in particolare di essere finitamente generato come modulo, non solo come algebra.

Esempio 2.2. Il morfismo $\varphi \colon \operatorname{Spec}(k[x,y]/(x^2 - y)) \to \operatorname{Spec}(k[y])$ che corrisponde alla inclusione $k[y] \to k[x,y]/(x^2 - y), y \mapsto y$ è finito perchè $k[x,y]/(x^2 - y)$ è generato da 1 e x come $k[y]$-modulo.

Lemma 2.3. *Un morfismo finito ha fibre finite.*

Proof. La domanda è locale e quindi possiamo supporre che $Y = \operatorname{Spec}(B)$ e $X = \operatorname{Spec}(A)$ come nella definizione di essere finito. Assumiamo che A è un B-modulo finitamente generato e sia $y \in Y$. Allora la fibra $k(y) \otimes_B A$ di φ è un $k(y)$ modulo finitamente generato tramitte la mappa $B \to k(y)$. Ma ogni $k(y)$-algebra che è finitamente generato come $k(y)$-modulo ha un numero finito di primi (è Artiniano). □

Osservazione 2.4. Avere fibre finite (si dice anche di essere 'quasi-finito') non è sufficiente per essere un morfismo finito. Per esempio, l'inclusione $\varphi \colon \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \to \mathbb{A}^1$ è data dalla mappa di annelli $k[t] \to k[t, t^{-1}]$. Allora φ è iniettivo quindi quasi-finito, ma non finito perchè $k[t, t^{-1}]$ non è finitamente generato come $k[t]$ modulo.

Osservazione 2.5. Si nota che nelle definizioni di (localmente) di tipo finito e finito si richiede l'esistenza di un certo ricoprimento con aperti affini di Y. Si può dimostrare che questo implica le condizioni per *ogni* ricoprimento affine di Y.

2.2. **Morfismi separati.** Abbiamo visto che ogni schema affine noetheriano è quasicompatto. Ma questo proprietà non porta gli vantagi che ha in altre teorie. Per esempio che l'immagine di un morfismo definito sullo spazio è chiuso. Questo perchè uno schema affine è quasi mai Hausdorff e quindi quasi mai compatto: già per esempio $\mathbb{A}^1_k$ non lo è. I concetti di morfismi separati e propri danno un analogo di essere Hausdorff e compatto nella categoria degli schemi.

Si riccorda, che un spazio topologico X è Hausdorff se e solo se la diagonale Δ in $X \times X$ è chiuso nella topologia prodotto. Questo generalizza per gli schemi sustituendo la topologia prodotto con il prodotto fibrato.

Sia $\varphi\colon X \to S$ un morfismo tra schemi. La diagonale $\Delta \subset X \times_S X$ è il sottoschema definito su affini $\operatorname{Spec}(A) \subset X$ e $\operatorname{Spec}(B) \subset S$ con $\varphi|_{\operatorname{Spec}(A)}\colon \operatorname{Spec}(A) \to \operatorname{Spec}(B)$ dal ideale generato da elementi

$$a \otimes 1 - 1 \otimes a \in A \otimes_B A.$$

Osservazione 2.6. Una definizione alternativa è: La diagonale è l'immagine del unico morfismo $X \to X \times_S X$ che composto con ognuno dei due proiezioni dà l'identitá su X (usando la proprietá universale del prodotto fibrato): l'identità al livello di schemi corrisponde al identità al livello di anelli. Quindi cerchiamo una mappa $\mu\colon A \otimes_B A \to A$ tale che le composizioni con $A \to A \otimes_B A, a \mapsto 1 \otimes a$ e $A \to A \otimes_B A, a \mapsto 1 \otimes a$ danno l'identità. Dobbiamo avere $\mu(a \otimes b) = ab$ e si verifica che il nucleo di questa mappa è generato da elementi $a \otimes 1 - 1 \otimes a$

Definizione 2.7. Un morfismo $\alpha\colon X \to S$ si chiama separato se la diagonale $\Delta \subset X \times_S X$ è chiusa. Un S-schema X si chiama separato se lo morfismo strutturale $X \to S$ lo è.

Esempio 2.8. Se X e S sono affini, allora la diagonale è un sottoschema chiuso per definizione e quindi φ è separato.

Esempio 2.9. Sia X la 'rette affine con l'origine sdoppiata', c'è lo schema ottenuto incollando $X_1 = \operatorname{Spec}(k[t])$ e $X_2 = \operatorname{Spec}(k[s])$ tramitte il morfismo $k[t, t^{-1}] \to k[s, s^{-1}], t \mapsto s$ che identifica $X_1 \setminus \{0\}$ con $X_2 \setminus \{0\}$. Allora $X \times_k X$ ha un ricoprimento affine dato da $X_1 \times X_1, X_1 \times X_2, X_2 \times X_1$ e $X_2 \times X_2$ (quindi $\mathbb{A}^2$ con 'assi sdopiati' e 'quattro punti di origine'). La diagonale contiene le origini di $X_1 \times X_1$ e $X_2 \times X_2$ ma non quelle di $X_2 \times X_1$ e $X_1 \times X_2$. Fuori dal origine, gli $(X_i \setminus \{0\}) \times (X_i \setminus \{0\})$ vanno tutti identificati e la diagonale in ogni $(X_i \setminus \{0\}) \times (X_i \setminus \{0\})$ sono i punti (x, x). Quindi la diagonale in $X_2 \times X_1$ e $X_1 \times X_2$ non è chiusa e il morfismo non separato.

Commento 2.10. Si nota che essere separato è un concetto 'relativo'. La identitá $X \to X$ con X come nel esempio precedente è separato.

Si ricorda che un anello di valutazione è un anello in cui gli ideali sono totalmente ordinati (rispetto al'inclusione). Si dice che un anello locale B domina un altro anello local A se $A \subset B$ e $\mathfrak{m}_A = \mathfrak{m}_B \cap A$.

Teorema 2.11 (Criterio valutativo di separatezza)**.** *Sia $f\colon X \to S$ un morfismo tra schemi con X noeteriano. Allora f è separato se e solo se si è verificata la seguente condizione. Per ogni campo K e per ogni anello di valutazione R con campo quoziente K sia $T = \operatorname{Spec}(R)$, $U = \operatorname{Spec}(K)$ e $i\colon U \to T$ il morfismo indotto dall'inclusione $R \subset K$. Dato un morfismo da T a Y e un morfismo da U a X in modo tale che il seguente diagramma sia commutativo*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r] & S, \end{tikzcd} \tag{1}$$

esiste al più un morfismo $T \to X$ che ritiene commutativo il diagramma.

Osservazione 2.12. Se anche S è Noetheriano e f di tipo finito, basta controllare il criterio per ogni anello di valutazione *discreta* R.

Esercizio 2.13. *Sia R un anello di valutazione con campo di frazioni K. Sia $T = \operatorname{Spec}(R)$ e $U = \operatorname{Spec}(K)$. Dare un morfismo da U a uno schema X è la stessa cosa come dare un punto $x \in X$ e un'inclusione di campi $k(x) \hookrightarrow K$. Dare un morfismo da T in X è equivalente a dare due punti x, η in X con $x \in \overline{\eta}$ e un inclusione di campi $k(\eta) \subset K$ tale che R domina l'anello locale di x in $\overline{\eta}$.*

Proof. Supponiamo che f sia separato. Siano $h, h'\colon T \to X$ due morfismi come nel teorema. Allora h e h' definiscono un morfismo $h''\colon T \to X \times_S X$. Visto che $h|_U = h|_{U'}$ h e h' mandano il punto generico η di T nello stesso punto di X e quindi h'' manda il punto generico di T nella diagonale Δ di $X \times_S X$. Visto che Δ è chiusa, h'' manda anche il punto chiuso p nella diagonale.

Quindi anche $h(p) = h'(p)$. Visto che h e h' definiscono – per assunzione – anche lo stesso inclusione di $k(h(\eta)) \subset K$, segue dal esercizio che $h = h'$.

Viceversa supponiamo che la condizione del criterio è soddisfatta e vogliamo dimostrare che la diagonale è chiusa. È sufficiente dimostrare: per ogni punto $\eta \in \Delta$ e $x \in \overline{\eta}$ abbiamo anche $x \in \Delta$ (si trova una dimostrazione per esempio in Hartshorne Lemma II.4.5). Sia $K = k(\eta)$ e $\mathcal{O}$ l'anello locale di x nello sottoschema $\overline{\eta}$ (con la struttura di schema ridotto). Allora $\mathcal{O}$ è un sotoanello locale di K e quindi esiste un anello di valutazione R di K che domina $\mathcal{O}$. Se mettiamo $T = \mathrm{Spec}(R)$ otteniamo usando l'esercizio un morfismo $T \to X \times_S X$ che manda il punto generico di T in η e il punto chiuso in x. Composizione con i due proiezioni dà due morfismi $T \to X$ che danno lo stesso morfismo a S e che coincidono su $\mathrm{Spec}(K)$. La condizione quindi da che i due morfismi coincidono. Quindi $T \to X \times_S X$ fatorizza attraverso il morfismo della diagonale $X \to X \times_S X$ e otteniamo che anche $x \in \Delta$. □

Corollario 2.14. *Supponiamo che tutti schemi sono noetheriani:*

(1) *Inclusioni di sottoschemi sono separate.*
(2) *La composizione di due morfismi separati è separata.*
(3) *I morfismi separati sono stabili per cambiamento di base.*
(4) *Se $f\colon X \to Y$ e $f'\colon X' \to Y'$ sono morfismi separati di schemi su uno stesso schema di base S, allora il prodotto fibrato*
$$f \times_S f'\colon X \times_S X' \to Y \times_S Y'$$
è separato.
(5) *Se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ sono due morfismi di schemi e se $g \circ f$ è separato, allora anche f è separato.*
(6) *Un morfismo $f\colon X \to Y$ è separato se e solo se Y può essere ricoperto da sottoinsiemi aperti V_i tali che i morfismi $f^{-1}(V_i) \to V_i$ siano separati, per ogni i.*

Proof. Per esempio, (2) si può verificare cosi: Sia $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ morfismi di schemi separati. Si considera
$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[dd, "i"] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[d, "g"] \\ T \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$
Una mappa $T \to X$ induce una mappa $T \to Y$ che è unica perchè g è separato. Ma anche una mappa $T \to X$ che commuta con $T \to Y$ è unica perchè f è separato, quindi $T \to X$ è unica e $g \circ f$ è separato. □

2.3. **Morfismi propri.** Uno dei proprietá più importante di spazzi compatti è che una mappa continua $X \to Y$ con X compatto (e Y Hausdroff) manda chiusi in chiusi. Si usa una versione di questo proprietá un po più forte per definire l'analogo nel mondo dei schemi:

Definizione 2.15. Un morfismo tra schemi $\varphi\colon X \to Y$ si chiama

(1) universalmente chiuso se per ogni morfismo $Y' \to Y$ il cambiamento di base $Y' \times_Y X \to Y'$ è chiuso.
(2) proprio se è di tipo finito, separato e universalmente chiuso.

Come prima, un S-schema X si chiama proprio se il morfismo strutturale $X \to S$ lo è.

Esempio 2.16. $\mathbb{A}^1_k$ non è proprio (su k). Il cambiamento di base dato da $\mathbb{A}^1_k \to \mathrm{Spec}(k)$ stesso dà la mappa $\mathbb{A}^1_k \times_k \mathbb{A}^1_k = \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^1_k$ che non è chiuso: l'immagine di $\mathrm{Spec}(k[x,y]/(xy-1))$ è $\mathbb{A}^1_k \setminus \{0\}$ non è chiuso (si deve aggiungere il punto 'a infinito', che faremmo nella sezione successiva).

—

Lezione 30.10.

Teorema 2.17 (Criterio valutativo di proprietà)**.** *Sia $f\colon X \to S$ un morfismo di tipo finito tra schemi con X noeteriano. Allora f è separato se e solo se si è verificata la seguente condizione. Per ogni campo K e per ogni anello di valutazione R con campo quoziente K sia $T = \operatorname{Spec}(R)$, $U = \operatorname{Spec}(K)$ e $i\colon U \to T$ il morfismo indotto dall'inclusione $R \subset K$. Dato un morfismo da T a Y e un morfismo da U a X in modo tale che il seguente diagramma sia commutativo*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r] & S, \end{tikzcd} \tag{2}$$

esiste un unico morfismo $T \to X$ che ritiene commutativo il diagramma.

Proof. Supponiamo che f sia proprio. Siccome f è anche separato, segue dal criterio valutativo di separatezza che se un morfismo $h\colon T \to X$ esiste, allora è unico. Dobbiamo quindi dimostrare l'esistenza.

La proprietà universale del prodotto fibrato dà lo seguente diagramma commutativa:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "i"'] & X \times_S T \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ & T \arrow[r] & S, \end{tikzcd}$$

Sia η l'immagine in $X \times_S T$ del punto unico contenuto in U. Allora f' è chiuso perchè f è universalmente chiuso e quindi anche $f'(\overline{\eta})$ è chiuso e deve essere uguale a T. Quindi abbiamo $p \in \overline{\eta}$ con $f'(p) = x$ dove x è il punto chiuso di T. Quindi otteniamo un morfismo locale di anneli locali $R \to \mathcal{O}_{p,\overline{\eta}}$. Il campo di funzioni di $\overline{\eta}$, $k(\eta)$, è contenuto in K. Visto che R è massimale tra annelli locali in K rispetto a la dominanza, segue che $R \simeq \mathcal{O}_{p,\overline{\eta}}$ e in particolare R domina $\mathcal{O}_{p,\overline{\eta}}$. Quindi Esercizio 2.13 ci dà un morfismo $T \to X \times_S T$ e composizione con $X \times_S T \to X$ dà il morfismo cercato.

Supponiamo adesso che f soddisfa il criterio e vogliamo vedere che f è proprio. Dall criterio valutativo di separatezza segue che f è separato. Visto che supponiamo già che f sia di tipo finito, rimane dimostrare che f è universalmente chiuso. Quindi sia $f'\colon X \times_S S' \to S$ e $Z \subset X \times_S S'$ un chiuso e vogliamo vedere che $f'(Z) \subset S'$ è chiuso. Usiamo come nella dimostrazione del criterio valutativo di separatezza che basta dimostrare il seguente: per ogni $\eta' = f'(\eta) \in f'(Z)$ e $x \in \overline{\eta'}$ anche $x \in f'(Z)$.

Sia $\mathcal{O}$ l'anello locale di x in $\overline{\eta'}$. Allora il campo di frazioni di $\mathcal{O}$ è $k(\eta')$ che è contenuto in $k(\eta)$. Sia R un anello di valutazione in $k(\eta')$ che domina $\mathcal{O}$. In questo modo otteniamo un diagramma

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}(k(\eta)) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & Z \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec}(R) \arrow[r] & S', \end{tikzcd} \tag{3}$$

Composizione con $Z \to X \times_S S' \to X$ e $S' \to S$ dà morfismi $\operatorname{Spec}(R) \to S'$ e $\operatorname{Spec}(k(\eta)) \to X$. Il criterio ci dice che esiste una mappa $\operatorname{Spec}(R) \to X$ tale che il diagramma diventa commutativo. Visto che $X \times_S S'$ è un prodotto fibrato, otteniamo anche un morfismo $h\colon \operatorname{Spec}(R) \to X \times_S S'$. Visto che $h(\eta_R) \in Z$ e Z è chiuso, anche $h(x_R) \in Z$. Ma allora $x = f'(h(x_R)) \in f'(Z)$. □

Commento 2.18. Come per il criterio valutativo di separatezza si puo dimostrare che se anche S è noeteriano, allora basta controllare il criterio per anelli di valutazione *discreta*.

Commento 2.19. Dal criterio segue, che un esempio di una mappa non-finito ma con fibre finite (quasi finito) come in Osservazione 2.4 non è possibile per morfismi propri. Infatti, si può dimostrare che un morfismo è finito se e solo se è quasi finito e proprio.

Corollario 2.20. *Supponiamo che tutti schemi sono noetheriani:*

(1) Un'immersione chiusa è un morfismo proprio.
(2) La composizione di due morfismi propri è proprio.
(3) I morfismi propri sono stabili per cambiamento di base.
(4) Se $f\colon X \to Y$ e $f'\colon X' \to Y'$ sono morfismi propri di schemi su uno stesso schema di base S, allora il prodotto fibrato

$$f \times_S f'\colon X \times_S X' \to Y \times_S Y'$$

è proprio.
(5) Se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ sono due morfismi di schemi e se $g \circ f$ è proprio e g separato, allora f è proprio.
(6) Un morfismo $f\colon X \to Y$ è proprio se e solo se Y può essere ricoperto da sottoinsiemi aperti V_i tali che i morfismi $f^{-1}(V_i) \to V_i$ siano propri, per ogni i.

Proof. Per esempio, per vedere (3), sia $S' \to S$ un morfismo e $f'\colon X' = X \times_S S' \to S'$ il cambiamento di base.

Supponiamo che abbiamo

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "i"] & X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r] & S' \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Sappiamo già che f' è separato da Corollario 2.14. Essere di tipo finito è stabile per cambiamento di base: si restringe a affini aperti e poi f' è dato da $f'\colon \mathrm{Spec}(A \otimes_B C) \to \mathrm{Spec}(A)$ con C finitamente generato come B-algebra. Si controlla che in questo caso anche $A \otimes_B C$ è finitamente generato come $A \otimes_B B = A$ algebra.

Finalmente, usiamo il criterio valutativo di proprietá per vedere che anche f' è proprio: Perché f è proprio, esiste una mappa $T \to X$ tale che il diagramma rimane commutativo. Ma per la proprietá universale del prodotto fibrato, viene indotto anche una mappa $T \to X'$. □

Definizione 2.21. Una varietá (astratto) è uno schema integrale, separato e di tipo finito su un campo algebraicamente chiuso k. Una varietà completa è una varietá che è anche proprio (su k).

3. Schemi e morfismi proiettivi

3.1. Proj di un anello graduato.

Analogo a Spec di un anello, che generalizza varietá affini, si può definire Proj di un anello graduato, che generalizza varietá proiettivi.

Si ricorda che un annello graduato S è una A-algebra con

$$S = \bigoplus_{\nu=0}^{\infty} S_\nu$$

tale che

$$S_\nu S_\mu \subset S_{\nu+\mu} \text{ e } S_0 = A.$$

Qua supponiamo sempre che S sia finitamente generato.

Un elemento f di S si chiama omogeneo di grado ν se $f \in S_\nu$. L'elemento 0 è per definizione omogeneo, ma non ha un grado fissato. Un ideale si chiama omogeneo se è generato da elementi omogenei. Scriviamo

$$S_+ = \bigoplus_{\nu=1}^{\infty} S_\nu,$$

che è un ideale che chiamiamo l'ideale irrelevante.

Dato un annello graduato S, $\mathrm{Proj} S$ è un A-schema. Per adesso supponiamo che S sia generato in grado 1.

Il suo insieme di punti $|\mathrm{Proj} S|$ consiste in ideali primi omogenei $\mathfrak{p}$ tale che $S_+ \not\subset \mathfrak{p}$.

Esercizio 3.1. $\mathrm{Proj} S = \emptyset$ *se e solo se tutti gli elementi di S_+ sono nilpotenti.*

La topologia su $|\mathrm{Proj}(S)|$ ha chiusi della forma

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in |\mathrm{Proj} S| \text{ e } I \subset \mathfrak{p}\}$$

per un ideale omogeneo I di S.

Finalmente, diamo una struttura di schema su $|\mathrm{Proj} S|$ specificandola su una base di aperti. Sia $f \in S_1$ un elemento di grado 1 e

$$U = |\mathrm{Proj} S| \setminus V(f).$$

Allora U è l'insieme di ideali primi omogenei che non contengono f. Quindi i punti di U possono essere identificato con l'insieme di primi omogenei nella localizaione $S[f^{-1}]$. Il punto chiave per dare una struttura di schema è lo seguente:

Lemma 3.2. *Gli ideali primi omogenei di $S[f^{-1}]$ sono in biiezione con (tutti) ideali primi di $S[f^{-1}]_0$, il parte di grado 0 di $S[f^{-1}]$.*

Proof. Sia $D = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj} S \mid f \notin P\}$ e consideriamo la mappa

$$\varphi \colon D \to \mathrm{Spec}(S[f^{-1}]_0)$$

che manda un ideale primo omogeneo $\mathfrak{p}$ in $S[f^{-1}]$ a $\mathfrak{p} \cap S[f^{-1}]_0$. Sia

$$\psi \colon \mathrm{Spec}(S[f^{-1}]_0) \to D$$

la mappa che manda un ideale $\mathfrak{q}$ a $\mathfrak{q}S[f^{-1}]$. C'è, $\psi(\mathfrak{q})$ è generato da elementi s tale che $\frac{s}{f^d} \in \mathfrak{q}$ per $d = \deg(s)$. Allora $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$: l'intersezione degli elementi $s \in \psi(\mathfrak{q})$ come sopra con $S[f^{-1}]_0$ sono, per definizione, gli elementi di $\mathfrak{q}$.

Per vedere che anche $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$, sia $s \in \mathfrak{p} \in D$. Allora $\frac{s}{f^{\deg(s)}} \in \varphi(\mathfrak{p})$ e quindi $s \in \psi(\varphi(\mathfrak{p}))$ e $\mathfrak{p} \subset \psi(\varphi(\mathfrak{p}))$.

Se invece $s \in \psi(\varphi(\mathfrak{p}))$, allora $\frac{s}{f^{\deg(s)}} \in \varphi(\mathfrak{p})$ e quindi esiste $s' \in \mathfrak{p}$ tale che $\frac{s'}{f^{\deg(s')}} = \frac{s}{f^{\deg(s)}}$. Questo vuole dire che esiste un $e \in \mathbb{N}$ tale che

$$f^e(s' f^{\deg(s)} - s f^{\deg(s')}) = 0.$$

Allora $s' \in \mathfrak{p}$ e quindi anche $s f^{\deg(s')+e} \in \mathfrak{p}$. Ma $f^{\deg(s')+e} \notin \mathfrak{p}$ e quindi $s \in \mathfrak{p}$ perché $\mathfrak{p}$ è primo. Insomma, abbiamo anche $\psi(\varphi(\mathfrak{p})) \subset \mathfrak{p}$. □

Quindi possiamo identificare un aperto $U = |\mathrm{Proj}(S)| \setminus V(f)$ con $\mathrm{Spec}(S[f^{-1}]_0)$ come spazi topologici. Prendiamo la struttura di schema su U come quella di $\mathrm{Spec}(S[f^{-1}]_0)$ e chiamiamo $U = (\mathrm{Proj} S)_f$. Per ogni scelta di f_i tale che $(f_1, f_2, \dots)$ ha radicale S_+, i $(\mathrm{Proj} S)_{f_i}$ danno un ricoprimento di $\mathrm{Proj} S$ con schemi affini. Per due di quelli aperti abbiamo che $(\mathrm{Proj} S)_f \cap (\mathrm{Proj} S)_g$ dentro $(\mathrm{Proj} S)_f$ è lo spettro di

$$S[f^{-1}]_0[(\frac{g}{f})^{-1}] = S[f^{-1}, g^{-1}]_0.$$

In particolare, possiamo incollare $(\mathrm{Proj} S)_f$ e $(\mathrm{Proj} S)_g$ lungo questi aperti affini e otteniamo una struttura di schema su $\mathrm{Proj} S$.

Si osserva che otteniamo una inclusione $S_0 \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Proj} S}(\mathrm{Proj} S)$ che induce una mappa $\mathrm{Proj}(S) \to \mathrm{Spec}(S_0)$ che realizza $\mathrm{Proj} S$ come S_0-schema.

—

Definizione 3.3 (Morfismi proiettivi su schemi affini)**.** Sia $B = \mathrm{Spec}(A)$ uno schema affine. Allora un morfismo di schemi $\varphi \colon X \to B$ è proiettivo se $X = \mathrm{Proj} S$ per un anello graduato e finitamente generato da elementi in grado 1, tale che $A \simeq S_0$ e φ è il morfismo strutturale $\mathrm{Proj} S \to \mathrm{Spec} S_0$. Lezione 3.11.

Esempio 3.4. Sia $S = \mathbb{C}[x, y]$ con la graduazione normale dato dal grado dei polinomi. Allora $S_+ = (x, y)$ e $\mathrm{Proj}(S) = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Ideali massimali di $\mathbb{C}[x, y, z]$ hanno la forma $(x - c_1, y - c_2)$ per $c_i \in \mathbb{C}$; se $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$, l'ideale non è omogeneo e altrimenti non è rilevante. Sia $f \in I$ con I omogeneo. Allora $f(x) = 0 \Rightarrow f(\lambda x) = 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$. Quindi per ogni punto x contenuto in $V(I) \subset \mathbb{A}^2$, $V(I)$ contiene anche la retta in x. Gli unici curve integrali in $\mathbb{A}^2$ per cui questa proprietà è vero, sono le rette che contengono l'origine. Quindi I punti chiusi hanno la forma $(ax+by)$ (che corrispondono al punto $[a:b]$ nei coordinati proiettivi classici di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$). L'unico punto non-chiuso è dato da (0). Le mappe della dimostrazione di Lemma 3.2 sono dati così: sia per esempio $f = x$. Allora

$$\varphi(ax+by) = (\frac{ax+by}{x}) = (a + b\frac{y}{x}) \subset \mathbb{C}[x,y][x^{-1}]_0 \simeq \mathbb{C}[\frac{y}{x}]$$

e

$$\psi(a+b\frac{y}{x}) = (ax+by).$$

L'anello S di $\mathrm{Proj}S$ si chiama l'anello delle coordinate omogenee. Diverso da $\mathrm{Spec}A$, S non è determinata da $\mathrm{Proj}S$:

Esempio 3.5. Sia

$$S^{(d)} = \bigoplus_{\nu=0}^{\infty} S_{d\nu}.$$

Allora $\mathrm{Proj}S = \mathrm{Proj}S^{(d)}$. Questo perché possiamo identificare affini aperti:

$$(\mathrm{Proj}S)_{f^d} = (\mathrm{Proj}S^{(d)})_f.$$

Gli elementi in $(\mathrm{Proj}S)_{f^d}$ sono ideali primi in $\mathrm{Spec}S[(f^d)^{-1}]_0$ quindi generato da elementi $\frac{s}{(f^d)^k}$ dove $kd = \deg(s)$. Invece gli elementi in $(\mathrm{Proj}S^{(d)})_f$ sono ideali primi in $\mathrm{Spec}S[(f)^{-1}]_0$ generato da elementi $\frac{s}{f^k}$ dove $kd = \deg(s)$ (nella vecchia graduazione). Un isomorfismo è dato da $f \mapsto f^d$.

Ma in generale $S^{(d)} \not\simeq S$. Per esempio, per $S = k[x,y]$, S è generato da 2 elementi (x,y) in grado 1 e $S^{(2)}$ da tre elementi (x^2, xy, y^2).

Commento 3.6. Anche se S e $S^{(d)}$ danno lo stesso Proj, in generale $\mathrm{Proj}(S)$ dipende dalla scelta della graduazione. Per esempio, se prendiamo $k[x,y,z]$ dove x,y,z hanno grado $a,b,c > 0$, allora oteniamo lo schema che si chiama piano proiettivo pesato $\mathbb{P}(a,b,c)$. Si puo realizzare come quotiente di $(k^3 \setminus \{0\})/(k^*)$ dove $\lambda(x,y,z) = (\lambda^a x, \lambda^b y, \lambda^c z)$. In generale $\mathbb{P}(a,b,c) \neq \mathbb{P}(a',b',c')$.

Commento 3.7. Si puo usare la costruzione di Esempio 3.5 per vedere che se S è un anello graduato finitamente generato allora esistono d tale che $S^{(d)}$ è finitamente generato da elementi di grado 1. Quindi, il fatto che supponiamo che S sia generato in grado 1 nella costruzione di $\mathrm{Proj}S$ non è una restrizione.

3.2. **Spazio proiettivo e sottoschemi chiusi.** Sia $S = A[x_0, \dots, x_n]$ graduato dal grado dei polinomi. Sia $U_i = (\mathrm{Proj}S)_{x_i}$. Allora

$$U_i = \mathrm{Spec}(S[x_i^{-1}]_0) = \mathrm{Spec}(A[x'_0, \dots, \widehat{x}'_i \dots x'_n]) \simeq \mathbb{A}^n_A$$

dove $x'_j = \frac{x_j}{x_i}$. In questo caso si scrive $\mathrm{Proj}S = \mathbb{P}^n_A$, lo spazio proiettivo, e si vede che è lo stesso schema che abbiamo ottenuto incollando i $\mathbb{A}^n$ in Sezione **??**. In particolare, la dimensione di $\mathbb{P}^n_A$ è n ovunque.

Sia I un ideale omogeneo di $A[x_0, \dots, x_n]$ e U_i un aperto come sopra. Allora definiamo

$$\widetilde{I}(U_i) = I \cdot A[x_0, \dots, x_n, x_i^{-1}] \cap A[x_0, \dots, x_n, x_i^{-1}]_0.$$

Si verifica che gli ideali $\widetilde{I}(U_i)$ sugli aperti affini danno un fascio coerente $\widetilde{I}$ di ideali su $\mathbb{P}^n_A$ e quindi un sottoschema chiuso $V(\widetilde{I})$. Infatti, abbiamo che

$$V(\widetilde{I}) \simeq \mathrm{Proj}S/I.$$

Si nota anche che si puo ottenere $\widetilde{I}(U_i)$ mettendo $x_i = 1$ sotto l'identificazione $A[x_0, \dots, x_n, x_i^{-1}]_0 \simeq A[x'_0, \dots, x'_n]$.

Nel altra direzione, dato un sottoschema chiuso $X \subset \mathbb{P}^n_A$ con fascio coerente di ideali $\mathcal{I}_X$, possiamo definire l'ideale $I(X)$ come gli elementi omogenei f di $A[x_0, \dots, x_n]$ tale che per ogni i abbiamo che

$$f|_{x_i=1} \in \mathcal{I}_X(U_i) \subset A[x'_0, \dots, x'_n] \simeq A[x_0, \dots, x_n, x_i^{-1}]_{(0)}.$$

Si controlla che se $I = I(X)$ allora $\mathcal{I}_X = \widetilde{I}$.

Esempio 3.8. L'ideale omogeneo $(x_0x_1 - x_2^2) \subset k[x_0, x_1, x_2]$ dá gli ideali $(x'_0 - (x'_2)^2), (x'_1 - (x'_2)^2)$ e $(x'_0x'_1 - 1)$ nei tre aperti affini dati da $x_0 \neq 0$, $x_1 \neq 0$ e $x_2 \neq 0$.

Esempio 3.9. Il complemento di un aperto affine U_i è, per definizione, $V(x_i)$. Questo è isomorfo a

$$\mathrm{Proj}(A[x_0, \dots, x_n]/(x_i)) \simeq \mathbb{P}^{n-1}_A.$$

Quindi la decomposizione $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^{n-1} \cup \mathbb{A}^n$ che conosciamo dal contesto classico è vale anche su anelli più generale (per esempio $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$).

Osserviamo che la corrispondenza tra sottoschemi chiusi di $\mathbb{P}^n_A$ e ideali omogenei di $A[x_0, \dots, x_n]$ non è biettivo:

Esempio 3.10. Gli ideali (x_0) e (x_0^2, x_0x_1) danno lo stesso sottoschema di $\mathbb{P}^2_k = \mathrm{Proj} k[x_0, x_1]$: Nel aperto affine U_0, abbiamo che (x_0) e (x_0^2, x_0x_1) sono entrambi uguale a tutto l'anello $k[x_0, x_1, x_0^{-1}]$. Invece su U_1 abbiamo che x_1 è invertibile quindi $(x_0^2, x_0x_1) = (x_0^2, x_0) = (x_0)$. (Si nota che lo spettro degli ideali non è isomorfo: uno dà la rette $x = 0$, l'altro la stessa rette ma con un punto non-ridotto al'origine).

Per ristorare una biezione serve lo seguente definizione:

Definizione 3.11. Sia I und ideale omogeneo in $S = A[x_0, \dots, x_n]$. Allora

$$\overline{I} = \{s \in S \mid \exists m, \forall i\colon\ x_i^m s \in I\}$$

denota la saturazione di I. L'ideale I si chiama saturato se $I = \overline{I}$.

Nel esempio precedente, la saturazione di (x_0^2, x_0x_1) è (x_0).

Esercizio 3.12. *Siano I e J ideali omogenei di $S = A[x_0, \dots, x_n]$. Allora*
(1) $\overline{I}$ è un ideale omogeneo
(2) $\mathrm{Proj} S/I = \mathrm{Proj} S/\overline{I}$
(3) $\mathrm{Proj} S/\overline{I} = \mathrm{Proj} S/\overline{J}$ se e solo se $\overline{I} = \overline{J}$.

Esercizio 3.13. *Ogni schema proiettivo su A si puó realizzare come sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^n_A$.*

Quindi otteniamo: ogni sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^n_A$ è proiettivo. E per ogni schema proiettivo X su A esiste un n tale che si puo realizzare X come un sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^n_A$.

3.3. **Morfismi proiettivi e loro proprietá.** Usiamo questo oservazione per definire morfismi proiettivi in generale:

Definizione 3.14. Un morfismo tra schemi $X \to Y$ è proiettivo se è la composizione di un immersione chiuso $X \to \mathbb{P}^n_Y$ con il morfismo $\mathbb{P}^n_Y \to Y$.

Quindi si può pensare di un morfismo proiettivo $X \to Y$ come una famiglia di sottoschemi chiusi di $\mathbb{P}^n$ parametrizzati da Y.

Qua $\mathbb{P}^n_Y$ si puo definire incollando gli $\mathbb{P}^n_{A_i}$ su un ricoprimento con affini $\mathrm{Spec}(A_i)$ di Y o come

$$\mathbb{P}^n_Y = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} Y.$$

Un'altra differenza tra Spec e Proj sono i sezioni globali del fascio strutturale:

Proposizione 3.15. *Sia X uno schema integrale e proiettivo su k un campo algebraicamente chiuso. Allora $\mathcal{O}_X(X) = k$.*

Proof. Sia $f \in \mathcal{O}_X(X)$ una funzione regolare globalmente definito. Per definizione di morfismi proiettivi, possiamo vedere X come un sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^n_k$ quindi $X = \mathrm{Proj} S$ con $S = k[x_0, \dots, x_n]/I$. Sia $X_i = X \cap U_i$ dove $U_i \subset \mathbb{P}^n_k$ sono gli apperti affini di prima. La restrizione di f a X_i dà un elemento di $\mathcal{O}_{X_i}(X_i) = S[x_i^{-1}]_0$. Quindi possiamo scrivere $f = \frac{g_i}{x_i^{N_i}}$ con $g_i \in S$ omogeneo di grado N_i. Siccome X è integrale, S è un dominio e segue che $x_i^{N_i} f \in S_{N_i}$ per ogni i.

Sia $N \geq \sum N_i$. Allora S_N è generato come spazio vettoriale su k di monomi di grado N e ogni monomio cosi ha un termine in cui il grado di un x_i è almeno N_i. Quindi $f \cdot S_N \subset S_N$ e anche $f^q S_N \subset S_N$ per ogni q (dove vediamo $f \in \mathcal{O}_X(X)$ e S_N entrambi nel campo di frazioni di S). In particolare, $x_0^N f^q \in S$ per ogni $q > 0$ e quindi il sottoanello $S[f]$ del campo di frazioni di S è contenuto in $x_0^{-N} S$: se $g \in S[f]$, allora

$$\begin{aligned} g &= s_0 + f s_1 + f^2 s_2 + \cdots = (x_0^N x_0^{-N})(s_0 + f s_1 + f^2 s_2 + \cdots) \\ &= x_0^{-N}(x_0^N s_0 + f x_0^N s_1 + f^2 x_0^N s_2 + \cdots) \in x_0^{-N} S. \end{aligned}$$

Visto che $x_0^{-N} S$ è un S-modulo finitamente generato e S è noeteriano, anche $S[f]$ è finitamente generato su S e otteniamo che f è integrale su S. Quindi ci sono elementi $a_i \in S$ tale che

$$f^m + a_{m-1} f^{m-1} + \ldots + a_0 = 0.$$

Possiamo sostituire l'equazione con i parti in grado zero. Ma f stesso ha grado 0 e $S_0 = k$, quindi possiamo suppore che $a_i \in k$ senza cambiare l'equazione. Segue che f è integrale su k. Ma k è algebraicamente chiuso e quindi $f \in k$. $\square$

Esercizio 3.16. *Sia $\psi \colon S \to T$ un morfismo di annelli graduati. Sia*

$$U = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(T) \mid \psi(S_+) \not\subset \mathfrak{p}\}.$$

Allora $U \subset \mathrm{Proj} S$ è aperto e ψ induce un morfismo

$$\varphi \colon U \to \mathrm{Proj}(S).$$

Commento 3.17. Il morfismo φ puó essere un isomorfismo, anche se ψ non lo è (simile a come abbiamo visto che $\mathrm{Proj} S = \mathrm{Proj} T$ non implica $S \simeq T$).

Esempio 3.18. Sia $\psi \colon k[x,y] \to k[x,y,z]$ l'inclusione. Allora $\psi(S_+) = \psi((x,y)) = (x,y)$ e $U = \mathbb{P}^2_k \setminus \{(x,y)\}$ con $\varphi \colon U \to \mathbb{P}^1_k$ dato in coordinati omogenei $[x:y:z] \mapsto [x:y]$.

Teorema 3.19. *Un morfismo proiettivo $\varphi \colon X \to Y$ tra schemi noeteriani è proprio.*

Proof. Per definizione di un morfismo proiettivo abbiamo che φ fattorizza come $X \to \mathbb{P}^n_Y \to Y$. Quindi otteniamo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "i"'] & \mathbb{P}^n_Y \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \arrow[d] \\ & Y \arrow[r] & \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

È sufficiente dimostrare che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ è proprio usando Corollario 2.20: in questo caso il cambio di base è proprio, quindi $\mathbb{P}^n_Y \to Y$ è proprio; il morfismo $X \to \mathbb{P}^n_Y$ è un immersione chiuso e quindi proprio; di consequenza anche $X \to Y$ come composizione di morfismi propri è proprio. Dimostrare che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ è proprio lasciamo come esercizio.

$\square$

Commento 3.20. Essere proiettivo e essere proprio sono molto simile ma si puó costruire esempi di schemi propri che non sono proettivi. Per una varietá astratta X si sa:

(1) Se X è di dimensione 1 e proprio allora è proiettivo.
(2) Se X è di dimensione 2, non-singolare e proprio allora è proiettivo.
(3) Ci sono esempi di X di dimensione 2, singolare e proprio ma non proiettivo.
(4) Ci sono esempi di X di dimensione 3, non-singolare e proprio ma non proiettivo.

—

3.4. **Proj globale.** Invece di costruire Proj di un anello graduato S su $\mathrm{Spec} S_0$, si puó anche costruire $\mathrm{Proj}\mathcal{F}$ di un fascio coerente graduato $\mathcal{F}$ su qualsiasi base B. Lezione 6.11.

Un fascio quasicoerente graduato $\mathcal{F}$ su B è un fascio quasicoerente di $\mathcal{O}_B$-moduli $\mathcal{F}_\nu$ tale che

$$\mathcal{F} = \bigoplus \mathcal{F}_\nu$$

con $\mathcal{F}_\nu \mathcal{F}_\mu \subset \mathcal{F}_{\nu+\mu}$ e $\mathcal{F}_0 = \mathcal{O}_B$. Quindi, dato un aperto affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ si B, abbiamo che $\mathcal{F}(U)$ è un anello graduato con $\mathcal{F}(U)_0 = A$.

Mettiamo $X_U = \mathrm{Proj}\mathcal{F}(U)$, uno schema su U. Se $U \subset V$ è un inclusione di aperti affini, abbiamo la mappa di restrizione

$$\psi\colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U).$$

La restrizione di ψ allo parte di grado 0 è la mappa di restrizione $\psi_0\colon \mathcal{O}_V(V) \to \mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_U(U)$. In particolare, ψ manda l'ideale irrelevant nel ideale irrelevante e quindi induce un morfismo

$$\varphi\colon X_U \to X_V$$

che commuta con i morfismi $X_U \to U$, $X_V \to V$ e l'inclusione $U \hookrightarrow V$. Quindi possiamo usare i morfismi di restrizione per incollare i X_U in uno schema globale

$$X = \mathrm{Proj}\mathcal{F} \to B.$$

Esempio 3.21. Abbiamo visto che $\mathbb{P}^n_A = \mathrm{Proj} A[x_0, \dots, x_n]$. Visto che $A[x_0, \dots, x_n] \simeq \mathrm{Sym}(A^{n+1})$ possiamo mettere

$$\mathbb{P}^n_B = \mathrm{Sym}(\mathcal{O}_B^{\oplus n+1}),$$

che dá una terza possibilitá di definire $\mathbb{P}^n_B$ per uno schema qualsiasi B.

Esempio 3.22. Piú generale, sia $\mathcal{E}$ un fascio coerente su B. Allora definiamo

$$\mathbb{P}\mathcal{E} = \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}(\mathcal{E})) \to B,$$

il fibrato proiettivo associato a $\mathcal{E}$.

3.5. **Fasci invertibili da moduli graduati.** Come per Spec, si puó definire anche per Proj fasci (quasicoerenti) associato a un modulo, che in questo caso deve essere graduato:

Sia B uno schema, e

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \dots$$

un fascio di $\mathcal{O}_B$ algebre graduate. Allora otteniamo come prima $\mathbb{P} = \mathrm{Proj}\mathcal{A}$ dato dal Proj globale. Sia $\mathcal{M}$ un fascio quasicoerente su B con una struttura di $\mathcal{A}$ modulo graduato; c'è con una decomposizione

$$\mathcal{M} = \dots \oplus \mathcal{M}_i \oplus \mathcal{M}_{i+1} \oplus \dots$$

con mappe

$$\mathcal{A}_j \otimes_B \mathcal{M}_i \to \mathcal{M}_{i+j}$$

che soddisfanno le proprietá di un modulo (distributivitá, associativitá, identitá).

Allora possiamo definire un fascio $\widetilde{\mathcal{M}}$ su $\mathbb{P}$ cosi: Sia $U \subset B$ un aperto affine. Quindi $\mathcal{A}(U)$ è un anello graduato. Per ogni elemento omogeneo $f \in \mathcal{A}(U)$ abbiamo un aperto affine

$$\mathbb{P}_{U,f} = (\mathrm{Proj}\mathcal{A}(U))_f = \mathrm{Spec}(\mathcal{A}(U)[f^{-1}]_0) \subset \mathbb{P}.$$

Allora i $\mathbb{P}_{U,f}$ danno un ricoprimento di aperti affini di $\mathbb{P}$ e $\mathcal{M}(U)$ è un $\mathcal{A}(U)$ modulo graduato su ogni U. Sia $\mathcal{M}_{U,f}$ il $\mathcal{A}(U)[f^{-1}]_0$-modulo

$$\mathcal{M}_{U,f} = (\mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{A}(U)} \mathcal{A}(U)[f^{-1}])_0.$$

Associatio a $\mathcal{M}_{U,f}$ abbiamo un fascio quasicoerent su $\mathrm{Spec}(\mathcal{A}(U)[f^{-1}]_0)$ e quelli si incollano per dare un fascio quasicoerente $\widetilde{\mathcal{M}}$ su $\mathbb{P}$.

Commento 3.23. Ogni fascio quasicoerente su $\mathrm{Proj}\mathcal{A}$ è ottenuto in questo modo. Ma due fasci di moduli $\mathcal{M}$ possono dare lo stesso fascio.

Commento 3.24. In caso che $B = \mathrm{Spec}(k)$, $\mathcal{A}$ è semplicemente una k-algebra graduato e $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-modulo graduato.

Esempio 3.25. Se prendiamo $\mathcal{M} = \mathcal{A}$, otteniamo il fascio strutturale $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}$. Dato $\mathcal{M}$ come sopra definiamo $\mathcal{M}(n)$ come lo stesso fascio di moduli ma con graduazione

$$\mathcal{M}(n)_i = \mathcal{M}_{n+i}$$

e con $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)$ lo fascio $\widetilde{\mathcal{A}}(n)$ associato a $\mathcal{A}(n)$. Tutti i $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)$ sono invertibili con

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)^{-1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-n)$$

e piu generale

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n+m).$$

Esempio 3.26. Sia $B = \mathrm{Spec}(k), \mathcal{A} = A = k[x,y]$ e $\mathcal{M} = M = A(1)$. Quindi $\mathbb{P} = \mathbb{P}^1_k$ e $U = \mathrm{Spec}(k)$. Poi abbiamo

$$\mathbb{P}_{(\mathrm{Spec}(k),x)} = \mathrm{Spec}(k[x,y][x^{-1}]_0) \text{ e } \mathbb{P}_{(\mathrm{Spec}(k),y)} = \mathrm{Spec}(k[x,y][y^{-1}]_0)$$

e

$$M_{\mathrm{Spec}(k),x} \quad = \quad (k[x,y] \otimes_{k[x,y]} k[x,y][x^{-1}])_0 = \{\frac{f}{x^{\deg(f)-1}} \mid f \in k[x,y], \deg(f) \neq 0\}$$

perché $(k[x,y] \otimes_{k[x,y]} k[x,y][x^{-1}]) = k[x,y][x^{-1}]$ con $\deg(h \otimes \frac{g}{x^n}) = \deg(h) - 1 + \deg(g) - n$. Analogo per

$$M_{\mathrm{Spec}(k),y} = (k[x,y] \otimes_k k[x,y][y^{-1}])_0 = \{\frac{f}{y^{\deg(f)-1}} \mid f \in k[x,y], \deg(f) \neq 0\}.$$

Un elemento $\frac{f}{x^{\deg(f)-1}}$ definisce quindi anche un elemento $M_{\mathrm{Spec}(k),y}$ se e solo se $\deg(f) = 1$. O in altre parole, le sezioni globali $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ sono $k[x,y]_1$. Più in generale abbiamo

$$\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = k[x_0, \ldots, x_n]_m \text{ per ogni } m, n \geq 1.$$

Per $m > 0$, otteniamo in particolare che $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$ è generato da $k = \binom{n+m}{n}$ sezioni globali, dato da $x_0^{m_0} \ldots x_n^{m_n}$ per ogni scelta di m_i tale che $\sum_i m_i = m$.

Se prendiamo invece $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ otteniamo sezioni locali $\frac{f}{x^{\deg(f)+1}}$ e $\frac{f}{y^{\deg(f)+1}}$ che non si estendono mai a sezioni globali. Anche qua abbiamo in generale

$$\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = \{0\} \text{ per ogni } m < 0.$$

Definizione 3.27. Sia X un Y-schema. Un fascio invertibile $\mathcal{P}$ su X si chiama molto ampio se esiste un immersione $i \colon X \to \mathbb{P}^n_Y$ tale che $\mathcal{P} \simeq i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_Y}(1)$. Il fascio si chiama ampio se $\mathcal{P}^{\otimes n}$ è molto ampio per un $n \in \mathbb{N}$.

Qua un morfismo si chiama un immersione se induce un isomorfismo tra X e un sottoschema aperto di un sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^n_Y$.

Commento 3.28. Uno schema noetheriano X su k è proiettivo se e solo se X è proprio e amette un fascio molto ampio: se X è proiettivo, allora X è proprio (Teorema 3.19) e per definizione l'inclusione $i \colon X \to \mathbb{P}^n_k$ dà il fascio molto ampio $i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1)$. Vice versa, se X e proprio su k, anche $X \to \mathbb{P}^n_k$ è proprio (Corollario 2.20 (5)) e quindi ha immagine chiuso e definisce un immersione chiuso.

4. Divisori e fasci invertibili

4.1. **Divisori di Weil.** In questa sezione supponiamo che X sia uno schema integrale, noetheriano, separato che è regolare in codimensione 1 (l'ultima proprietà vuole dire che ogni anello locale $\mathcal{O}_{X,x}$ di dimensione 1 è regolare).

Definizione 4.1. Un divisore primo Y di uno schema X è un sottoschema integrale chiuso di codimensione 1. Un divisore di Weil è una combinazione lineare $D = \sum_{i=1}^{n} n_i Y_i$ di divisori primi Y_i con $n_i \in \mathbb{Z}$. D si chiama effetivo se $n_i \geq 0$ per ogni i. Si scrive $\mathrm{Div}(X)$ per il gruppo di divisori di Weil su X.

Una funzione razionale su X è un elemento del campo $K = \mathcal{O}_{\eta,X}$, dove η è il punto generico di X. Per ogni divisore primo D abbiamo il punto generico η_D di D e perché D ha codimensione 1, $\mathcal{O}_{\eta_D,X}$ è un anello di valutazione discreta con valutazione ν_D con campo di frazioni K (perché $\mathcal{O}_{\eta_D,X}$ è un dominio locale Noetheriano con ideale massimale principale e non è un campo). Definiamo l'ordine di zero/poli di una funzione razionale non-zero $f \in K^*$ lungo D come $\nu_D(f)$. C'è se $\nu_D(f) > 0$ diciamo che f ha un zero lungo D di ordine $\nu_D(f)$; e se $\nu_D(f) < 0$ diciamo che f ha un polo lungo D di ordine $-\nu_D(f)$.

Esempio 4.2. Se prendiamo come $D = \mathrm{Spec}(k[x,y]/(x)) \subset \mathrm{Spec}(k[x,y]) = \mathbb{A}^2$, allora η_D è il punto dato dal ideale primo (x). Quindi $\mathcal{O}_{\eta_D,X} = k[x,y]_{(x)}$. Ogni elemeto in $f \in K = k(x,y)$ si può scrivere come $f = x^n g$ con $g \notin (x)$ e $\nu_D(f) = n$. Per esempio, $\nu_D(\frac{y}{x}) = -1$, $\nu_D(x^2 - y) = 0$ e $\nu_D(xy) = 1$.

Sempre con gli assunzioni su X di sopra abbiamo:

Lemma 4.3. *Sia $f \in K^*$. Allora ci sono solo un numero finito di divisori primi D tale che $\nu_D(f) \neq 0$.*

Proof. Per ogni aperto affine $U = \mathrm{Spec}(A) \subset X$ abbiamo $K = \mathrm{Frac}(A)$. Possibilmente restringendo a U_f, possiamo scegliere $U = \mathrm{Spec}(A) \subset X$ affine tale che f è regolare, c'è $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Il complemento $X \setminus U$ è chiuso e quindi un unione finito di componenti irreducibili (X è noetheriano). In particolare, esiste solo un numero finito di divisori primi D con $D \cap U = \emptyset$ e quindi è sufficiente mostrare l'affermazione per U. Visto che $f \in \mathcal{O}_X(U)$, $\nu_D(f) \geq 0$. Poi $\nu_D(f) > 0$ se e solo se D è contenuto nello sottoschema chiuso Z di U definito da $f \cdot A$. Ma visto che X è noetheriano, Z contiene un numero finito di divisori primi. □

—

Lezione 13.11.