

GEOMETRIA 5 - TEORIA DEI SCHEMI

CINZIA CASAGRANDE E KARL CHRIST

CONTENTS

1. Schemi	1
1.1. Introduzione	1
1.2. Definizione di Schemi	2
2. Proprietà di morfismi	4
2.1. Finitezza	4
2.2. Morfismi separati	5
2.3. Morfismi propri	7
3. Schemi e morfismi proiettivi	9
3.1. Proj di un anello graduato	9
3.2. Spazio proiettivo e sottoschemi chiusi	11
3.3. Morfismi proiettivi e loro proprietà	12
3.4. Proj globale	13
3.5. Fasci invertibili da moduli graduati	14
4. Divisori e fasci invertibili	15
4.1. Divisori di Weil	15
4.2. Divisori di Cartier	17
4.3. Fasci invertibili e sistemi lineari	18

1. SCHEMI

1.1. Introduzione. Una varietà algebrica $X \subset k^m$ tradizionalmente è definito come il luogo di zeri di un insieme di polinomi $f_1, \dots, f_n$ con m variabili e con coefficienti in un campo k (algebraicamente chiuso, di caratteristica 0).

Si vede subito, che X infatti non dipende dalla scelta di $f_1, \dots, f_n$ ma invece dall'ideale I generato dai f_i . Poi l'anello di funzioni regolari su X è, per definizione,

$$k[X] = k[x_1, \dots, x_n]/I$$

, che sono 'polinomi' o funzioni regolari definite su X . Per avere una corrispondenza biettiva tra ideali e varietà algebriche, si deve imporre che $k[X]$ è un dominio: per esempio, il luogo di zeri di (y) e (y^2) è identico, anche se gli ideali non lo sono. Nella prospettiva classica, si risolve questa ambivalenza restringendo l'insieme di ideali che sono ammessi. Nella prospettiva moderna degli schemi, si aumenta invece l'insieme di oggetti geometrici – c'è si introduce un oggetto geometrico che corrisponde a (y^2) ed è diverso da (y) .

Perché questo è utile anche se magari si è interessato soprattutto nelle varietà algebriche? Si consideri per esempio una degenerazione nel parametro t di una parabola, $xt - y^2 = 0$. Per $t \neq 0$, questo definisce una varietà algebrica. Per $t = 0$ invece otteniamo l'ideale (y^2) e quindi la teoria delle varietà algebriche ci dice di prendere il radicale e vederlo come la retta data da (y) . Ma questo non dà una teoria soddisfacente; per esempio, il grado per $t \neq 0$ sarebbe uguale a 2, mentre per $t = 0$ uguale a 1. La teoria dei schemi dà la possibilità di parlare in un senso formale anche dal oggetto geometrico associato a (y^2) (che dovrebbe essere una 'retta doppia').

Quindi, la teoria dei schemi introduce la possibilità di avere nilpotenti nel anello delle coordinate. Ma non solo, nel mondo dei schemi si può per esempio anche lavorare su un anello (come $\mathbb{Z}$

con applicazioni alla teoria dei numeri) invece del campo k , o l'anello delle coordinate non è necessariamente finitamente generato come k -algebra.

Un'altra prospettiva che gli schemi offrono, è che permettono di definire 'varietà astratte' – invece delle varietà con un spazio ambientale come $\mathbb{A}_k^n$ o $\mathbb{P}_k^n$. Questo passo è analogo al concetto delle varietà astratte nella geometria differenziale: si ottiene l'oggetto astratto incollando aperti. Nel caso degli schemi, gli oggetti di base sono i schemi affini.

1.2. Definizione di Schemi. Uno schema affine è dato da

- (1) $\text{Spec}(R)$ con R anello commutativo con la topologia di Zariski e
- (2) $\mathcal{O}$ fascio strutturale/fascio delle funzioni regolari sullo schema.

Definiamo questo oggetto in tre passi, prima come insieme, poi come spazio topologico e finalmente come 'spazio localmente annellato', quindi lo fascio strutturale $\mathcal{O}$.

1.2.1. Schemi affini come insieme. Sia R un anello (assumiamo sempre che gli anelli sono commutativi con 1).

Definizione 1.1. Gli elementi di $\text{Spec}(R)$ come insieme sono i ideali primi $\mathfrak{p}$ di R .

Osservazione 1.2. $R \subseteq R$ non è un ideale primo. $\{0\}$ invece lo è se R non ha divisori di zero (R è un dominio). Se R è un campo, l'unico ideale primo è $\{0\}$ perchè ogni elemento $x \neq 0$ è invertibile.

Un ideale primo $\mathfrak{m}$ è un ideale massimale se $\mathfrak{m}$ è massimale rispetto all'inclusione; c'è se $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}$ per un ideale primo $\mathfrak{p}$, allora $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$. Ogni ideale diverso da R è contenuto in un ideale massimale.

Osservazione 1.3. Un ideale $\mathfrak{p}$ è primo se e solo se $R/\mathfrak{p}$ è un dominio, e $\mathfrak{p}$ è massimale se e solo se $R/\mathfrak{p}$ è un campo.

Esempio 1.4. (1) $\text{Spec}(\mathbb{Z}) = \{(p) \mid p \text{ interi primi}\} \cup \{(0)\}$.
 (2) $\text{Spec}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = \{(0)\}$ perchè $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ è un campo
 (3) $\text{Spec}(\mathbb{C}[x]) = \{(x - \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\} \cup \{(0)\}$. In questo caso, $\mathbb{C}[x]/(x - \alpha) \simeq \mathbb{C}$ via $f \mapsto f(\alpha)$. Quindi $(x - \alpha)$ è un ideale massimale. Poi tutti ideali primi hanno questa forma: Sia $\mathfrak{p} \neq (0)$ un ideale primo di $\mathbb{C}[x]$ e $f \in \mathfrak{p}$ un elemento di grado minimo. Allora f non è costante perchè altrimenti $\mathfrak{p} = \mathbb{C}[x]$. Se $\deg(f) > 1$, allora $f = c(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$ perchè $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso. Ma $\mathfrak{p}$ è primo e quindi deve contenere anche uno dei $(x - \alpha_i)$. Visto che $\mathbb{C}[x]$ è un dominio ad ideali principali (per esempio dovuto al fatto che esiste un algoritmo di divisione con resto), dobbiamo avere $\mathfrak{p} = (x - \alpha_i)$.

Dato $f \in R$ si può associare a f una 'funzione' $\bar{f}$ con dominio $\text{Spec}(R)$ (vogliamo vedere i elementi in R come polinomi/funzioni regolari su $\text{Spec}(R)$). Dato $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$, consideriamo

$$\alpha: R \rightarrow R/\mathfrak{p} \hookrightarrow \text{Frac}(R/\mathfrak{p}).$$

Allora, l'immagine di $\bar{f}$ sotto f è definito come $\alpha(f)$ e scriviamo $\bar{f}(\mathfrak{p})$.

Osservazione 1.5. Questo non definisce una vera funzione, perchè il codominio $\text{Frac}(R/\mathfrak{p})$ cambia con $\mathfrak{p}$.

Esempio 1.6. $f = 15 \in \mathbb{Z}$. Allora il 'valore' di f a (7) per esempio è $15 \bmod 7 = [1] \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Il 'valore' di f a (11) è $[4] \in \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Il 'valore' di f a (0) è $15 \in \mathbb{Q}$.

Esempio 1.7. $R = k[x]/(x^2)$, allora $\text{Spec}(R) = \{(x)\}$. Il 'valore' di $f = x \in R$ sul unico punto (x) è zero. In particolare, dà una 'funzione' non-zero su $\text{Spec}(R)$ che ha 'valore' zero a tutti i punti di $\text{Spec}(R)$.

1.2.2. *Schemi affini come spazi topologici.* La Topologia di Zariski ha chiusi dato così: per ogni $S \subset R$, abbiamo un chiuso

$$V(S) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid S \subset \mathfrak{p}\}.$$

Osservazione 1.8. Otteniamo la stessa definizione scrivendo $V(S) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid \bar{f}(\mathfrak{p}) = 0\}$, che collega alla nozione più classico che i chiusi sono luoghi di zero di un insieme di polinomi. Poi chiaramente $V(S) = V((S))$ dove (S) è l'ideale generato da S .

Proposizione 1.9. *Prendere i $V(I)$ per I ideali di R come chiusi definisce una topologia su $\text{Spec}(R)$ (la topologia di Zariski).*

Proof. Controlliamo i requisiti per una topologia uno per uno:

- Ogni ideale contiene (0) , quindi $V(0) = \text{Spec}(R)$.
- Ogni ideale primo è proprio, quindi $V(R) = \emptyset$.
- Per un insieme di ideali $\{I_\alpha\}_\alpha$ abbiamo:

$$\mathfrak{p} \in \bigcap_\alpha V(I_\alpha) \Leftrightarrow I_\alpha \subseteq \mathfrak{p}, \forall \alpha \Leftrightarrow \bigcup_\alpha I_\alpha \subset \mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in V\left(\bigcup_\alpha I_\alpha\right)$$

- Per due ideali I e J abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \in V(I) \cup V(J) &\Leftrightarrow \mathfrak{p} \in V(I) \text{ o } \mathfrak{p} \in V(J) \Leftrightarrow I \subset \mathfrak{p} \text{ o } J \subset \mathfrak{p} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow I \cap J \subset \mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in V(I \cap J), \end{aligned}$$

dove $I \cap J \subset \mathfrak{p} \Rightarrow I \subset \mathfrak{p} \text{ o } J \subset \mathfrak{p}$ perchè se non, esistono $i \in I$ e $j \in J$ con $i, j \notin \mathfrak{p}$. Ma in questo caso $ij \in I \cap J \subset \mathfrak{p}$ e quindi $i \in \mathfrak{p} \text{ o } j \in \mathfrak{p}$ perchè $\mathfrak{p}$ è primo, una contraddizione. $\square$

Gli aperti sono i complementi dei chiusi. Se $S = \{f\}$, $f \in R$, allora

$$\text{Spec}(R) \setminus V(f) = \text{Spec}(R_f) = X_f,$$

dove $R_f = R[f^{-1}]$ è la localizzazione di R rispetto a f (c'è rispetto al insieme moltiplicativamente chiuso $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$):

Proposizione 1.10. *Gli ideali primi di R_f sono in corrispondenza biunivoca con i primi di R che non contengono f .*

Proof. Per passare da R a R_f si usano due costruzioni:

- $I \subset R$ ideale, allora $I^e = \{\frac{t}{f^n} \mid t \in I\}$ l'ideale di R_f generato dall'immagine di I con

$$\phi: R \rightarrow R_f, t \mapsto \frac{t}{1}.$$

Si chiama la estensione di I (in R_f).

- $J \subset R_f$, $J^c = \phi^{-1}(J)$, la contrazione di J .

Per ogni ideale abbiamo che $I \subseteq (I^e)^c$ e $J = (J^c)^e$. Poi la contrazione di un ideale primo è sempre primo, perchè la preimmagine di un ideale primo tramite un morfismo tra anelli è primo.

Vogliamo dimostrare che per $\mathfrak{q} \subset R$ primo con $f \notin \mathfrak{q}$ abbiamo $\mathfrak{q}^e = (\mathfrak{q}^c)^e$ e che $\mathfrak{q}^e$ è primo (in generale, l'ideale generato dall'immagine di un ideale primo non è necessariamente un ideale primo). Così si vede che la corrispondenza biunivoca che cerchiamo è dato dalla estensione con inverso la contrazione (si osserva che per $f \in \mathfrak{q}$, la estensione di $\mathfrak{q}$ è R_f perchè f diventa invertibile in R_f).

Entrambe le affermazioni seguono se dimostriamo che $\frac{x}{f^n} \in \mathfrak{q}^e$ implica che $x \in \mathfrak{q}$. Lo facciamo adesso: Sappiamo che $\frac{x}{f^n} \sim \frac{x'}{f^{n'}}$ per un $x' \in \mathfrak{q}$. Per definizione esiste un m t.c. $f^m(xf^{n'} - x'f^n) = 0$ e quindi $xf^{m+n'} = x'f^{m+n}$. Visto che $x' \in \mathfrak{q}$, anche $x'f^{m+n} \in \mathfrak{q}$ e quindi $xf^{m+n'} \in \mathfrak{q}$. Ma $f^{m+n'} \notin \mathfrak{q}$, e quindi $x \in \mathfrak{q}$ come desiderato. $\square$

Lemma 1.11. *Gli X_f formano una base per la topologia di Zariski.*

Proof. Dobbiamo dimostrare che ogni aperto U di $\text{Spec}(R)$ si può scrivere come unione di aperti X_f . Per definizione abbiamo $U = \text{Spec}(R) \setminus V(S)$, che possiamo riscrivere come

$$U = \text{Spec}(R) \setminus V(S) = \text{Spec}(R) \setminus \bigcap_{f \in S} V(f) = \bigcup_{f \in S} (\text{Spec}(R) \setminus V(f)) = \bigcup_{f \in S} X_f.$$

□

Gli aperti X_f si comportano bene anche per intersezioni finite:

Lemma 1.12. Abbiamo $X_f \cap X_g = X_{fg}$.

Proof. L'aperto X_f è l'insieme di primi che non contengono f . Quindi $X_f \cap X_g$ è l'insieme di primi che non contengono f e non contengono g . L'insieme X_{fg} invece sono gli ideali primi che non contengono fg e quindi che contengono né f né g . □

Osservazione 1.13. $\text{Spec}(R)$ non è quasi mai di Hausdorff. Infatti, gli unici punti chiusi sono i ideali massimali perché se $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ la chiusura è

$$\bar{\mathfrak{p}} = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\}.$$

Esempio 1.14. In $\text{Spec}(\mathbb{C}[x])$ i $\mathfrak{p} = (x - \alpha)$ sono punti chiusi. (0) non è chiuso e la sua chiusura è tutto $\text{Spec}(\mathbb{C}[x])$. Se $f \in \mathbb{C}[x]$, allora $V(f)$ sono tutti i punti $(x - \alpha)$ t.c. $f(\alpha) = 0$ che significa α tale che $f(\alpha) = 0$.

Lezione 22.9. ...

2. PROPRIETÀ DI MORFISMI

2.1. Finitezza. Ci sono due condizioni di finitezza di morfismi molto importanti, una molto più restrittiva rispetto all'altra. Iniziamo con quella più generale:

Definizione 2.1. Un morfismo di schemi $\varphi: X \rightarrow Y$ si chiama di tipo finito se per ogni punto $y \in Y$ c'è un aperto affine $U \in V = \text{Spec } B$ è un ricoprimento finito del suo preimmagine

$$\varphi^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^n U_i$$

tale che $U_i \simeq \text{Spec}(A_i)$ e la mappa

$$\varphi_V^\#: B = \mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}V) \rightarrow \mathcal{O}_X(U_i) = A_i$$

realizza A_i come un'algebra finitamente generata su B per ogni i .

Osservazione 2.2. Esiste anche il concetto di essere *localmente* di tipo finito dove non si richiede che il ricoprimento di $\varphi^{-1}(U)$ sia finito.

Molti schemi naturali soddisfano questa proprietà, per esempio:

Esempio 2.3. Sottoschemi chiusi $\text{Spec}(k[x_1, \dots, x_n]/I)$ dello spazio affine $\mathbb{A}_k^n$ sono chiaramente di tipo finito su k .

La intuizione è che richiedere di essere di tipo finito esclude fibre di dimensione infinita e certe situazioni 'non-geometriche' come spettri di anelli locali:

Esempio 2.4. Sia $R = k[x]_{(x)}$ lo anello locale di $\mathbb{A}_k^1$ al punto (x) . Gli elementi di R sono funzioni razionali $\frac{f(x)}{g(x)}$ dove $g(x) \notin (x)$. Per generare l'anello come k -algebra servono almeno $1, x, \frac{1}{g(x)}$ con $g(x)$ monico di grado 1 e $g(x) \neq x$, un numero infinito di generatori. Quindi $\text{Spec}(R)$ non è di tipo finito su $\text{Spec}(k)$.

Il concetto seguente di finitezza è molto più restrittivo:

Definizione 2.5. Un morfismo di schemi $\varphi: X \rightarrow Y$ è finito se per ogni punto $y \in Y$ c'è un aperto affine $y \in V = \text{Spec} B$ tale che anche $\varphi^{-1}(V) = \text{Spec}(A)$ è affine e

$$\varphi_V^\#: B = \mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}V) = A$$

realizza A come un modulo finitamente generato su B .

Esempio 2.6. Il morfismo $\varphi: \text{Spec}(k[x, y]/(x^2 - y)) \rightarrow \text{Spec}(k[y])$ che corrisponde alla inclusione $k[y] \rightarrow k[x, y]/(x^2 - y), y \mapsto y$ è finito perchè $k[x, y]/(x^2 - y)$ è generato da 1 e x come $k[y]$ -modulo.

Lemma 2.7. *Un morfismo finito ha fibre finite.*

Proof. La domanda è locale e quindi possiamo supporre che $Y = \text{Spec}(B)$ e $X = \text{Spec}(A)$ come nella definizione di essere finito. Assumiamo che A è un B -modulo finitamente generato e sia $y \in Y$. Allora la fibra $k(y) \otimes_B A$ di φ è un $k(y)$ modulo finitamente generato tramite la mappa $B \rightarrow k(y)$. Ma ogni $k(y)$ -algebra che è finitamente generato come $k(y)$ -modulo ha un numero finito di primi (è Artiniano). $\square$

Osservazione 2.8. Avere fibre finite (si dice anche di essere ‘quasi-finito’) non è sufficiente per essere un morfismo finito. Per esempio, l’inclusione $\varphi: \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{A}^1$ è data dalla mappa di anelli $k[t] \rightarrow k[t, t^{-1}]$. Allora φ è iniettivo quindi quasi-finito, ma non finito perchè $k[t, t^{-1}]$ non è finitamente generato come $k[t]$ modulo.

Osservazione 2.9. Si nota che nelle definizioni di (localmente) di tipo finito e finito si richiede l’esistenza di un certo ricoprimento con aperti affini di Y . Si può dimostrare che questo implica le condizioni per ogni ricoprimento affine di Y .

2.2. Morfismi separati. Abbiamo visto che ogni schema affine noetheriano è quasicompatto. Ma questa proprietà non porta gli vantaggi che ha in altre teorie. Per esempio che l’immagine di un morfismo definito sullo spazio è chiuso. Questo perchè uno schema affine è quasi mai Hausdorff e quindi quasi mai compatto: già per esempio $\mathbb{A}_k^1$ non lo è. I concetti di morfismi separati e propri danno un analogo di essere Hausdorff e compatto nella categoria degli schemi.

Si ricorda, che un spazio topologico X è Hausdorff se e solo se la diagonale Δ in $X \times X$ è chiuso nella topologia prodotto. Questo generalizza per gli schemi sostituendo la topologia prodotto con il prodotto fibrato.

Sia $\varphi: X \rightarrow S$ un morfismo tra schemi. La diagonale $\Delta \subset X \times_S X$ è il sottoschema definito su affini $\text{Spec}(A) \subset X$ e $\text{Spec}(B) \subset S$ con $\varphi|_{\text{Spec}(A)}: \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B)$ dal ideale generato da elementi

$$a \otimes 1 - 1 \otimes a \in A \otimes_B A.$$

Osservazione 2.10. Una definizione alternativa è: La diagonale è l’immagine del unico morfismo $X \rightarrow X \times_S X$ che composto con ognuno dei due proiezioni dà l’identità su X (usando la proprietà universale del prodotto fibrato): l’identità al livello di schemi corrisponde al identità al livello di anelli. Quindi cerchiamo una mappa $\mu: A \otimes_B A \rightarrow A$ tale che le composizioni con $A \rightarrow A \otimes_B A, a \mapsto 1 \otimes a$ e $A \rightarrow A \otimes_B A, a \mapsto 1 \otimes a$ danno l’identità. Dobbiamo avere $\mu(a \otimes b) = ab$ e si verifica che il nucleo di questa mappa è generato da elementi $a \otimes 1 - 1 \otimes a$

Definizione 2.11. Un morfismo $\alpha: X \rightarrow S$ si chiama separato se la diagonale $\Delta \subset X \times_S X$ è chiusa. Un S -schema X si chiama separato se lo morfismo strutturale $X \rightarrow S$ lo è.

Esempio 2.12. Se X e S sono affini, allora la diagonale è un sottoschema chiuso per definizione e quindi φ è separato.

Esempio 2.13. Sia X la ‘rette affine con l’origine sdoppiata’, c’è lo schema ottenuto incollando $X_1 = \text{Spec}(k[t])$ e $X_2 = \text{Spec}(k[s])$ tramite il morfismo $k[t, t^{-1}] \rightarrow k[s, s^{-1}], t \mapsto s$ che identifica $X_1 \setminus \{0\}$ con $X_2 \setminus \{0\}$. Allora $X \times_k X$ ha un ricoprimento affine dato da $X_1 \times X_1, X_1 \times X_2, X_2 \times X_1$ e $X_2 \times X_2$ (quindi $\mathbb{A}^2$ con ‘assi sdoppiati’ e ‘quattro punti di origine’). La diagonale contiene le origini di $X_1 \times X_1$ e $X_2 \times X_2$ ma non quelle di $X_2 \times X_1$ e $X_1 \times X_2$.

Fuori dal origine, gli $(X_i \setminus \{0\}) \times (X_i \setminus \{0\})$ vanno tutti identificati e la diagonale in ogni $(X_i \setminus \{0\}) \times (X_i \setminus \{0\})$ sono i punti (x, x) . Quindi la diagonale in $X_2 \times X_1$ e $X_1 \times X_2$ non è chiusa e il morfismo non separato.

Commento 2.14. Si nota che essere separato è un concetto ‘relativo’. La identità $X \rightarrow X$ con X come nel esempio precedente è separato.

Si ricorda che un anello di valutazione è un anello in cui gli ideali sono totalmente ordinati (rispetto all’inclusione). Si dice che un anello locale B domina un altro anello locale A se $A \subset B$ e $\mathfrak{m}_A = \mathfrak{m}_B \cap A$.

Teorema 2.15 (Criterio valutativo di separatezza). *Sia $f: X \rightarrow S$ un morfismo tra schemi con X noetheriano. Allora f è separato se e solo se si è verificata la seguente condizione. Per ogni campo K e per ogni anello di valutazione R con campo quoziente K sia $T = \text{Spec}(R)$, $U = \text{Spec}(K)$ e $i: U \rightarrow T$ il morfismo indotto dall’inclusione $R \subset K$. Dato un morfismo da T a Y e un morfismo da U a X in modo tale che il seguente diagramma sia commutativo*

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & X \\ \downarrow i & & \downarrow f \\ T & \longrightarrow & S, \end{array} \quad (1)$$

esiste al più un morfismo $T \rightarrow X$ che ritiene commutativo il diagramma.

Osservazione 2.16. Se anche S è Noetheriano e f di tipo finito, basta controllare il criterio per ogni anello di valutazione discreta R .

Esercizio 2.17. *Sia R un anello di valutazione con campo di frazioni K . Sia $T = \text{Spec}(R)$ e $U = \text{Spec}(K)$. Dare un morfismo da U a uno schema X è la stessa cosa come dare un punto $x \in X$ e un’inclusione di campi $k(x) \hookrightarrow K$. Dare un morfismo da T in X è equivalente a dare due punti x, η in X con $x \in \bar{\eta}$ e un inclusione di campi $k(\eta) \subset K$ tale che R domina l’anello locale di x in $\bar{\eta}$.*

Proof. Supponiamo che f sia separato. Siano $h, h': T \rightarrow X$ due morfismi come nel teorema. Allora h e h' definiscono un morfismo $h'': T \rightarrow X \times_S X$. Visto che $h|_U = h'|_U$, h e h' mandano il punto generico η di T nello stesso punto di X e quindi h'' manda il punto generico di T nella diagonale Δ di $X \times_S X$. Visto che Δ è chiusa, h'' manda anche il punto chiuso p nella diagonale. Quindi anche $h(p) = h'(p)$. Visto che h e h' definiscono – per assunzione – anche lo stesso inclusione di $k(h(\eta)) \subset K$, segue dal esercizio che $h = h'$.

Viceversa supponiamo che la condizione del criterio è soddisfatta e vogliamo dimostrare che la diagonale è chiusa. È sufficiente dimostrare: per ogni punto $\eta \in \Delta$ e $x \in \bar{\eta}$ abbiamo anche $x \in \Delta$ (si trova una dimostrazione per esempio in Hartshorne Lemma II.4.5). Sia $K = k(\eta)$ e $\mathcal{O}$ l’anello locale di x nello sottoschema $\bar{\eta}$ (con la struttura di schema ridotto). Allora $\mathcal{O}$ è un sottoanello locale di K e quindi esiste un anello di valutazione R di K che domina $\mathcal{O}$. Se mettiamo $T = \text{Spec}(R)$ otteniamo usando l’esercizio un morfismo $T \rightarrow X \times_S X$ che manda il punto generico di T in η e il punto chiuso in x . Composizione con i due proiezioni dà due morfismi $T \rightarrow X$ che danno lo stesso morfismo a S e che coincidono su $\text{Spec}(K)$. La condizione quindi dà che i due morfismi coincidono. Quindi $T \rightarrow X \times_S X$ fattorizza attraverso il morfismo della diagonale $X \rightarrow X \times_S X$ e otteniamo che anche $x \in \Delta$. $\square$

Corollario 2.18. *Supponiamo che tutti schemi sono noetheriani:*

- (1) *Inclusioni di sottoschemi sono separate.*
- (2) *La composizione di due morfismi separati è separata.*
- (3) *I morfismi separati sono stabili per cambiamento di base.*
- (4) *Se $f: X \rightarrow Y$ e $f': X' \rightarrow Y'$ sono morfismi separati di schemi su uno stesso schema di base S , allora il prodotto fibrato*

$$f \times_S f': X \times_S X' \rightarrow Y \times_S Y'$$

è separato.

- (5) Se $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ sono due morfismi di schemi e se $g \circ f$ è separato, allora anche f è separato.
- (6) Un morfismo $f: X \rightarrow Y$ è separato se e solo se Y può essere ricoperto da sottoinsiemi aperti V_i tali che i morfismi $f^{-1}(V_i) \rightarrow V_i$ siano separati, per ogni i .

Proof. Per esempio, (2) si può verificare così: Sia $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ morfismi di schemi separati. Si considera

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & X \\ \downarrow i & & \downarrow f \\ & & Y \\ & & \downarrow g \\ T & \longrightarrow & Z \end{array}$$

Una mappa $T \rightarrow X$ induce una mappa $T \rightarrow Y$ che è unica perchè g è separato. Ma anche una mappa $T \rightarrow X$ che commuta con $T \rightarrow Y$ è unica perchè f è separato, quindi $T \rightarrow X$ è unica e $g \circ f$ è separato. $\square$

2.3. Morfismi propri. Uno dei proprietà più importante di spazi compatti è che una mappa continua $X \rightarrow Y$ con X compatto (e Y Hausdorff) manda chiusi in chiusi. Si usa una versione di questo proprietà un po più forte per definire l'analogo nel mondo dei schemi:

Definizione 2.19. Un morfismo tra schemi $\varphi: X \rightarrow Y$ si chiama

- (1) universalmente chiuso se per ogni morfismo $Y' \rightarrow Y$ il cambiamento di base $Y' \times_Y X \rightarrow Y'$ è chiuso.
- (2) proprio se è di tipo finito, separato e universalmente chiuso.

Come prima, un S -schema X si chiama proprio se il morfismo strutturale $X \rightarrow S$ lo è.

Esempio 2.20. $\mathbb{A}_k^1$ non è proprio (su k). Il cambiamento di base dato da $\mathbb{A}_k^1 \rightarrow \text{Spec}(k)$ stesso dà la mappa $\mathbb{A}_k^1 \times_k \mathbb{A}_k^1 = \mathbb{A}_k^2 \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ che non è chiuso: l'immagine di $\text{Spec}(k[x, y]/(xy - 1))$ è $\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0\}$ non è chiuso (si deve aggiungere il punto 'a infinito', che faremmo nella sezione successiva).

—

Teorema 2.21 (Criterio valutativo di proprietà). Sia $f: X \rightarrow S$ un morfismo di tipo finito tra schemi con X noetheriano. Allora f è separato se e solo se si è verificata la seguente condizione. Per ogni campo K e per ogni anello di valutazione R con campo quoziente K sia $T = \text{Spec}(R)$, $U = \text{Spec}(K)$ e $i: U \rightarrow T$ il morfismo indotto dall'inclusione $R \subset K$. Dato un morfismo da T a Y e un morfismo da U a X in modo tale che il seguente diagramma sia commutativo

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & X \\ \downarrow i & & \downarrow f \\ T & \longrightarrow & S, \end{array} \quad (2)$$

esiste un unico morfismo $T \rightarrow X$ che ritiene commutativo il diagramma.

Proof. Supponiamo che f sia proprio. Siccome f è anche separato, segue dal criterio valutativo di separatezza che se un morfismo $h: T \rightarrow X$ esiste, allora è unico. Dobbiamo quindi dimostrare l'esistenza.

La proprietà universale del prodotto fibrato dà lo seguente diagramma commutativa:

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{j} & X \times_S T & \longrightarrow & X \\ & \searrow i & \downarrow f' & & \downarrow f \\ & & T & \longrightarrow & S, \end{array}$$

Sia η l'immagine in $X \times_S T$ del punto unico contenuto in U . Allora f' è chiuso perchè f è universalmente chiuso e quindi anche $f'(\bar{\eta})$ è chiuso e deve essere uguale a T . Quindi abbiamo $p \in \bar{\eta}$ con $f'(p) = x$ dove x è il punto chiuso di T . Quindi otteniamo un morfismo locale di anelli $R \rightarrow \mathcal{O}_{p,\bar{\eta}}$. Il campo di funzioni di $\bar{\eta}$, $k(\eta)$, è contenuto in K . Visto che R è massimale tra anelli locali in K rispetto a la dominanza, segue che $R \simeq \mathcal{O}_{p,\bar{\eta}}$ e in particolare R domina $\mathcal{O}_{p,\bar{\eta}}$. Quindi Esercizio 2.17 ci dà un morfismo $T \rightarrow X \times_S T$ e composizione con $X \times_S T \rightarrow X$ dà il morfismo cercato.

Supponiamo adesso che f soddisfa il criterio e vogliamo vedere che f è proprio. Dall criterio valutativo di separatezza segue che f è separato. Visto che supponiamo già che f sia di tipo finito, rimane dimostrare che f è universalmente chiuso. Quindi sia $f': X \times_S S' \rightarrow S$ e $Z \subset X \times_S S'$ un chiuso e vogliamo vedere che $f'(Z) \subset S'$ è chiuso. Usiamo come nella dimostrazione del criterio valutativo di separatezza che basta dimostrare il seguente: per ogni $\eta' = f'(\eta) \in f'(Z)$ e $x \in \bar{\eta'}$ anche $x \in f'(Z)$.

Sia $\mathcal{O}$ l'anello locale di x in $\bar{\eta'}$. Allora il campo di frazioni di $\mathcal{O}$ è $k(\eta')$ che è contenuto in $k(\eta)$. Sia R un anello di valutazione in $k(\eta')$ che domina $\mathcal{O}$. In questo modo otteniamo un diagramma

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(k(\eta)) & \longrightarrow & Z \\ \downarrow i & & \downarrow f \\ \text{Spec}(R) & \longrightarrow & S', \end{array} \quad (3)$$

Composizione con $Z \rightarrow X \times_S S' \rightarrow X$ e $S' \rightarrow S$ dà morfismi $\text{Spec}(R) \rightarrow S'$ e $\text{Spec}(k(\eta)) \rightarrow X$. Il criterio ci dice che esiste una mappa $\text{Spec}(R) \rightarrow X$ tale che il diagramma diventa commutativo. Visto che $X \times_S S'$ è un prodotto fibrato, otteniamo anche un morfismo $h: \text{Spec}(R) \rightarrow X \times_S S'$. Visto che $h(\eta_R) \in Z$ e Z è chiuso, anche $h(x_R) \in Z$. Ma allora $x = f'(h(x_R)) \in f'(Z)$. $\square$

Commento 2.22. Come per il criterio valutativo di separatezza si può dimostrare che se anche S è noetheriano, allora basta controllare il criterio per anelli di valutazione *discreta*.

Commento 2.23. Dal criterio segue, che un esempio di una mappa non-finito ma con fibre finite (quasi finito) come in Osservazione 2.8 non è possibile per morfismi propri. Infatti, si può dimostrare che un morfismo è finito se e solo se è quasi finito e proprio.

Corollario 2.24. *Supponiamo che tutti schemi sono noetheriani:*

- (1) *Un'immersione chiusa è un morfismo proprio.*
- (2) *La composizione di due morfismi propri è proprio.*
- (3) *I morfismi propri sono stabili per cambiamento di base.*
- (4) *Se $f: X \rightarrow Y$ e $f': X' \rightarrow Y'$ sono morfismi propri di schemi su uno stesso schema di base S , allora il prodotto fibrato*

$$f \times_S f': X \times_S X' \rightarrow Y \times_S Y'$$

è proprio.

- (5) *Se $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ sono due morfismi di schemi e se $g \circ f$ è proprio e g separato, allora f è proprio.*
- (6) *Un morfismo $f: X \rightarrow Y$ è proprio se e solo se Y può essere ricoperto da sottoinsiemi aperti V_i tali che i morfismi $f^{-1}(V_i) \rightarrow V_i$ siano propri, per ogni i .*

Proof. Per esempio, per vedere (3), sia $S' \rightarrow S$ un morfismo e $f': X' = X \times_S S' \rightarrow S'$ il cambiamento di base.

Supponiamo che abbiamo

$$\begin{array}{ccccc} U & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow i & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ T & \longrightarrow & S' & \longrightarrow & S \end{array}$$

Sappiamo già che f' è separato da Corollario 2.18. Essere di tipo finito è stabile per cambiamento di base: si restringe a affini aperti e poi f' è dato da $f': \text{Spec}(A \otimes_B C) \rightarrow \text{Spec}(A)$ con C finitamente generato come B -algebra. Si controlla che in questo caso anche $A \otimes_B C$ è finitamente generato come $A \otimes_B B = A$ algebra.

Finalmente, usiamo il criterio valutativo di proprietà per vedere che anche f' è proprio: Perché f è proprio, esiste una mappa $T \rightarrow X$ tale che il diagramma rimane commutativo. Ma per la proprietà universale del prodotto fibrato, viene indotto anche una mappa $T \rightarrow X'$. $\square$

Definizione 2.25. Una varietà (astratto) è uno schema integrale, separato e di tipo finito su un campo algebricamente chiuso k . Una varietà completa è una varietà che è anche proprio (su k).

3. SCHEMI E MORFISMI PROIETTIVI

3.1. Proj di un anello graduato. Analogo a Spec di un anello, che generalizza varietà affini, si può definire Proj di un anello graduato, che generalizza varietà proiettivi.

Si ricorda che un anello graduato S è una A -algebra con

$$S = \bigoplus_{\nu=0}^{\infty} S_{\nu}$$

tale che

$$S_{\nu}S_{\mu} \subset S_{\nu+\mu} \text{ e } S_0 = A.$$

Qua supponiamo sempre che S sia finitamente generato.

Un elemento f di S si chiama omogeneo di grado ν se $f \in S_{\nu}$. L'elemento 0 è per definizione omogeneo, ma non ha un grado fissato. Un ideale si chiama omogeneo se è generato da elementi omogenei. Scriviamo

$$S_+ = \bigoplus_{\nu=1}^{\infty} S_{\nu},$$

che è un ideale che chiamiamo l'ideale irrelevante.

Dato un anello graduato S , $\text{Proj} S$ è un A -schema. Per adesso supponiamo che S sia generato in grado 1.

Il suo insieme di punti $|\text{Proj} S|$ consiste in ideali primi omogenei $\mathfrak{p}$ tale che $S_+ \not\subset \mathfrak{p}$.

Esercizio 3.1. $\text{Proj} S = \emptyset$ se e solo se tutti gli elementi di S_+ sono nilpotenti.

La topologia su $|\text{Proj}(S)|$ ha chiusi della forma

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in |\text{Proj} S| \text{ e } I \subset \mathfrak{p}\}$$

per un ideale omogeneo I di S .

Finalmente, diamo una struttura di schema su $|\text{Proj} S|$ specificandola su una base di aperti. Sia $f \in S_1$ un elemento di grado 1 e

$$U = |\text{Proj} S| \setminus V(f).$$

Allora U è l'insieme di ideali primi omogenei che non contengono f . Quindi i punti di U possono essere identificato con l'insieme di primi omogenei nella localizzazione $S[f^{-1}]$. Il punto chiave per dare una struttura di schema è lo seguente:

Lemma 3.2. Gli ideali primi omogenei di $S[f^{-1}]$ sono in biiezione con (tutti) ideali primi di $S[f^{-1}]_0$, il parte di grado 0 di $S[f^{-1}]$.

Proof. Sia $D = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj} S \mid f \notin \mathfrak{p}\}$ e consideriamo la mappa

$$\varphi: D \rightarrow \text{Spec}(S[f^{-1}]_0)$$

che manda un ideale primo omogeneo $\mathfrak{p}$ in $S[f^{-1}]$ a $\mathfrak{p} \cap S[f^{-1}]_0$. Sia

$$\psi: \text{Spec}(S[f^{-1}]_0) \rightarrow D$$

la mappa che manda un ideale $\mathfrak{q}$ a $\mathfrak{q}S[f^{-1}]$. C'è, $\psi(\mathfrak{q})$ è generato da elementi s tale che $\frac{s}{f^d} \in \mathfrak{q}$ per $d = \deg(s)$. Allora $\varphi \circ \psi = \text{id}$: l'intersezione degli elementi $s \in \psi(\mathfrak{q})$ come sopra con $S[f^{-1}]_0$ sono, per definizione, gli elementi di $\mathfrak{q}$.

Per vedere che anche $\psi \circ \varphi = \text{id}$, sia $s \in \mathfrak{p} \in D$. Allora $\frac{s}{f^{\deg(s)}} \in \varphi(\mathfrak{p})$ e quindi $s \in \psi(\varphi(\mathfrak{p}))$ e $\mathfrak{p} \subset \psi(\varphi(\mathfrak{p}))$.

Se invece $s \in \psi(\varphi(\mathfrak{p}))$, allora $\frac{s}{f^{\deg(s)}} \in \varphi(\mathfrak{p})$ e quindi esiste $s' \in \mathfrak{p}$ tale che $\frac{s'}{f^{\deg(s')}} = \frac{s}{f^{\deg(s)}}$. Questo vuole dire che esiste un $e \in \mathbb{N}$ tale che

$$f^e(s'f^{\deg(s)} - sf^{\deg(s')}) = 0.$$

Allora $s' \in \mathfrak{p}$ e quindi anche $s'f^{\deg(s')+e} \in \mathfrak{p}$. Ma $f^{\deg(s')+e} \notin \mathfrak{p}$ e quindi $s \in \mathfrak{p}$ perché $\mathfrak{p}$ è primo. Insomma, abbiamo anche $\psi(\varphi(\mathfrak{p})) \subset \mathfrak{p}$. $\square$

Quindi possiamo identificare un aperto $U = |\text{Proj}(S)| \setminus V(f)$ con $\text{Spec}(S[f^{-1}]_0)$ come spazi topologici. Prendiamo la struttura di schema su U come quella di $\text{Spec}(S[f^{-1}]_0)$ e chiamiamo $U = (\text{Proj}S)_f$. Per ogni scelta di f_i tale che $(f_1, f_2, \dots)$ ha radicale S_+ , i $(\text{Proj}S)_{f_i}$ danno un ricoprimento di $\text{Proj}S$ con schemi affini. Per due di quelli aperti abbiamo che $(\text{Proj}S)_f \cap (\text{Proj}S)_g$ dentro $(\text{Proj}S)_f$ è lo spettro di

$$S[f^{-1}]_0[(\frac{g}{f})^{-1}] = S[f^{-1}, g^{-1}]_0.$$

In particolare, possiamo incollare $(\text{Proj}S)_f$ e $(\text{Proj}S)_g$ lungo questi aperti affini e otteniamo una struttura di schema su $\text{Proj}S$.

Si osserva che otteniamo un'inclusione $S_0 \hookrightarrow \mathcal{O}_{\text{Proj}S}(\text{Proj}S)$ che induce una mappa $\text{Proj}(S) \rightarrow \text{Spec}(S_0)$ che realizza $\text{Proj}S$ come S_0 -schema.

Lezione 3.11.

Definizione 3.3 (Morfismi proiettivi su schemi affini). Sia $B = \text{Spec}(A)$ uno schema affine. Allora un morfismo di schemi $\varphi: X \rightarrow B$ è proiettivo se $X = \text{Proj}S$ per un anello graduato e finitamente generato da elementi in grado 1, tale che $A \simeq S_0$ e φ è il morfismo strutturale $\text{Proj}S \rightarrow \text{Spec}S_0$.

Esempio 3.4. Sia $S = \mathbb{C}[x, y]$ con la graduazione normale dato dal grado dei polinomi. Allora $S_+ = (x, y)$ e $\text{Proj}(S) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Ideali massimali di $\mathbb{C}[x, y, z]$ hanno la forma $(x - c_1, y - c_2)$ per $c_i \in \mathbb{C}$; se $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$, l'ideale non è omogeneo e altrimenti non è rilevante. Sia $f \in I$ con I omogeneo. Allora $f(x) = 0 \Rightarrow f(\lambda x) = 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$. Quindi per ogni punto x contenuto in $V(I) \subset \mathbb{A}^2$, $V(I)$ contiene anche la retta in x . Gli unici curve integrali in $\mathbb{A}^2$ per cui questa proprietà è vero, sono le rette che contengono l'origine. Quindi i punti chiusi hanno la forma $(ax + by)$ (che corrispondono al punto $[a : b]$ nei coordinati proiettivi classici di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$). L'unico punto non-chiuso è dato da (0) . Le mappe della dimostrazione di Lemma 3.2 sono dati così: sia per esempio $f = x$. Allora

$$\varphi(ax + by) = (\frac{ax + by}{x}) = (a + b\frac{y}{x}) \in \mathbb{C}[x, y][x^{-1}]_0 \simeq \mathbb{C}[\frac{y}{x}]$$

e

$$\psi(a + b\frac{y}{x}) = (ax + by).$$

L'anello S di $\text{Proj}S$ si chiama l'anello delle coordinate omogenee. Diverso da $\text{Spec}A$, S non è determinata da $\text{Proj}S$:

Esempio 3.5. Sia

$$S^{(d)} = \bigoplus_{\nu=0}^{\infty} S_{d\nu}.$$

Allora $\text{Proj}S = \text{Proj}S^{(d)}$. Questo perché possiamo identificare affini aperti:

$$(\text{Proj}S)_{f^d} = (\text{Proj}S^{(d)})_f.$$

Gli elementi in $(\text{Proj} S)_{f^d}$ sono ideali primi in $\text{Spec} S[(f^d)^{-1}]_0$ quindi generato da elementi $\frac{s}{(f^d)^k}$ dove $kd = \deg(s)$. Invece gli elementi in $(\text{Proj} S^{(d)})_f$ sono ideali primi in $\text{Spec} S[(f)^{-1}]_0$ generato da elementi $\frac{s}{f^k}$ dove $kd = \deg(s)$ (nella vecchia graduazione). Un isomorfismo è dato da $f \mapsto f^d$.

Ma in generale $S^{(d)} \not\simeq S$. Per esempio, per $S = k[x, y]$, S è generato da 2 elementi (x, y) in grado 1 e $S^{(2)}$ da tre elementi (x^2, xy, y^2) .

Commento 3.6. Anche se S e $S^{(d)}$ danno lo stesso Proj , in generale $\text{Proj}(S)$ dipende dalla scelta della graduazione. Per esempio, se prendiamo $k[x, y, z]$ dove x, y, z hanno grado $a, b, c > 0$, allora otteniamo lo schema che si chiama piano proiettivo pesato $\mathbb{P}(a, b, c)$. Si può realizzare come quoziente di $(k^3 \setminus \{0\})/(k^*)$ dove $\lambda(x, y, z) = (\lambda^a x, \lambda^b y, \lambda^c z)$. In generale $\mathbb{P}(a, b, c) \neq \mathbb{P}(a', b', c')$.

Commento 3.7. Si può usare la costruzione di Esempio 3.5 per vedere che se S è un anello graduato finitamente generato allora esistono d tale che $S^{(d)}$ è finitamente generato da elementi di grado 1. Quindi, il fatto che supponiamo che S sia generato in grado 1 nella costruzione di $\text{Proj} S$ non è una restrizione.

3.2. Spazio proiettivo e sottoschemi chiusi. Sia $S = A[x_0, \dots, x_n]$ graduato dal grado dei polinomi. Sia $U_i = (\text{Proj} S)_{x_i}$. Allora

$$U_i = \text{Spec}(S[x_i^{-1}]_0) = \text{Spec}(A[x'_0, \dots, \widehat{x'_i} \dots x'_n]) \simeq \mathbb{A}_A^n$$

dove $x'_j = \frac{x_j}{x_i}$. In questo caso si scrive $\text{Proj} S = \mathbb{P}_A^n$, lo spazio proiettivo, e si vede che è lo stesso schema che abbiamo ottenuto incollando i $\mathbb{A}^n$ in Sezione ?? In particolare, la dimensione di $\mathbb{P}_A^n$ è n ovunque.

Sia I un ideale omogeneo di $A[x_0, \dots, x_n]$ e U_i un aperto come sopra. Allora definiamo

$$\widetilde{I}(U_i) = I \cdot A[x_0, \dots, x_n, x_i^{-1}] \cap A[x_0, \dots, x_n, x_i^{-1}]_0.$$

Si verifica che gli ideali $\widetilde{I}(U_i)$ sugli aperti affini danno un fascio coerente $\widetilde{I}$ di ideali su $\mathbb{P}_A^n$ e quindi un sottoschema chiuso $V(\widetilde{I})$. Infatti, abbiamo che

$$V(\widetilde{I}) \simeq \text{Proj} S/I.$$

Si nota anche che si può ottenere $\widetilde{I}(U_i)$ mettendo $x_i = 1$ sotto l'identificazione $A[x_0, \dots, x_n, x_i^{-1}]_0 \simeq A[x'_0, \dots, x'_n]$.

Nel'altra direzione, dato un sottoschema chiuso $X \subset \mathbb{P}_A^n$ con fascio coerente di ideali $\mathcal{I}_X$, possiamo definire l'ideale $I(X)$ come gli elementi omogenei f di $A[x_0, \dots, x_n]$ tale che per ogni i abbiamo che

$$f|_{x_i=1} \in \mathcal{I}_X(U_i) \subset A[x'_0, \dots, x'_n] \simeq A[x_0, \dots, x_n, x_i^{-1}]_{(0)}.$$

Si controlla che se $I = I(X)$ allora $\mathcal{I}_X = \widetilde{I}$.

Esempio 3.8. L'ideale omogeneo $(x_0x_1 - x_2^2) \subset k[x_0, x_1, x_2]$ dà gli ideali $(x'_0 - (x'_2)^2)$, $(x'_1 - (x'_2)^2)$ e $(x'_0x'_1 - 1)$ nei tre aperti affini dati da $x_0 \neq 0$, $x_1 \neq 0$ e $x_2 \neq 0$.

Esempio 3.9. Il complemento di un aperto affine U_i è, per definizione, $V(x_i)$. Questo è isomorfo a

$$\text{Proj}(A[x_0, \dots, x_n]/(x_i)) \simeq \mathbb{P}_A^{n-1}.$$

Quindi la decomposizione $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^{n-1} \cup \mathbb{A}^n$ che conosciamo dal contesto classico è vale anche su anelli più generale (per esempio $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$).

Osserviamo che la corrispondenza tra sottoschemi chiusi di $\mathbb{P}_A^n$ e ideali omogenei di $A[x_0, \dots, x_n]$ non è biettivo:

Esempio 3.10. Gli ideali (x_0) e (x_0^2, x_0x_1) danno lo stesso sottoschema di $\mathbb{P}_k^2 = \text{Proj} k[x_0, x_1]$: Nel aperto affine U_0 , abbiamo che (x_0) e (x_0^2, x_0x_1) sono entrambi uguali a tutto l'anello $k[x_0, x_1, x_0^{-1}]$. Invece su U_1 abbiamo che x_1 è invertibile quindi $(x_0^2, x_0x_1) = (x_0^2, x_0) = (x_0)$. (Si nota che lo spettro degli ideali non è isomorfo: uno dà la retta $x = 0$, l'altro la stessa retta ma con un punto non-ridotto all'origine).

Per ristore una biezione serve la seguente definizione:

Definizione 3.11. Sia I un ideale omogeneo in $S = A[x_0, \dots, x_n]$. Allora

$$\bar{I} = \{s \in S \mid \exists m, \forall i: x_i^m s \in I\}$$

denota la saturazione di I . L'ideale I si chiama saturato se $I = \bar{I}$.

Nel esempio precedente, la saturazione di (x_0^2, x_0x_1) è (x_0) .

Esercizio 3.12. Siano I e J ideali omogenei di $S = A[x_0, \dots, x_n]$. Allora

- (1) $\bar{I}$ è un ideale omogeneo
- (2) $\text{Proj} S/I = \text{Proj} S/\bar{I}$
- (3) $\text{Proj} S/\bar{I} = \text{Proj} S/\bar{J}$ se e solo se $\bar{I} = \bar{J}$.

Esercizio 3.13. Ogni schema proiettivo su A si può realizzare come sottoschema chiuso di $\mathbb{P}_A^n$.

Quindi otteniamo: ogni sottoschema chiuso di $\mathbb{P}_A^n$ è proiettivo. E per ogni schema proiettivo X su A esiste un n tale che si può realizzare X come un sottoschema chiuso di $\mathbb{P}_A^n$.

3.3. Morfismi proiettivi e loro proprietà. Usiamo questa osservazione per definire morfismi proiettivi in generale:

Definizione 3.14. Un morfismo tra schemi $X \rightarrow Y$ è proiettivo se è la composizione di un'immersione chiusa $X \rightarrow \mathbb{P}_Y^n$ con il morfismo $\mathbb{P}_Y^n \rightarrow Y$.

Quindi si può pensare di un morfismo proiettivo $X \rightarrow Y$ come una famiglia di sottoschemi chiusi di $\mathbb{P}^n$ parametrizzati da Y .

Qua $\mathbb{P}_Y^n$ si può definire incollando gli $\mathbb{P}_{A_i}^n$ su un ricoprimento con affini $\text{Spec}(A_i)$ di Y o come

$$\mathbb{P}_Y^n = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\mathbb{Z}} Y.$$

Un'altra differenza tra Spec e Proj sono i sezioni globali del fascio strutturale:

Proposizione 3.15. Sia X uno schema integrale e proiettivo su k un campo algebricamente chiuso. Allora $\mathcal{O}_X(X) = k$.

Proof. Sia $f \in \mathcal{O}_X(X)$ una funzione regolare globalmente definita. Per definizione di morfismi proiettivi, possiamo vedere X come un sottoschema chiuso di $\mathbb{P}_k^n$ quindi $X = \text{Proj} S$ con $S = k[x_0, \dots, x_n]/I$. Sia $X_i = X \cap U_i$ dove $U_i \subset \mathbb{P}_k^n$ sono gli aperti affini di prima. La restrizione di f a X_i dà un elemento di $\mathcal{O}_{X_i}(X_i) = S[x_i^{-1}]_0$. Quindi possiamo scrivere $f = \frac{g_i}{x_i^{N_i}}$ con $g_i \in S$ omogeneo di grado N_i . Siccome X è integrale, S è un dominio e segue che $x_i^{N_i} f \in S_{N_i}$ per ogni i .

Sia $N \geq \sum N_i$. Allora S_N è generato come spazio vettoriale su k di monomi di grado N e ogni monomio così ha un termine in cui il grado di un x_i è almeno N_i . Quindi $f \cdot S_N \subset S_N$ e anche $f^q S_N \subset S_N$ per ogni q (dove vediamo $f \in \mathcal{O}_X(X)$ e S_N entrambi nel campo di frazioni di S). In particolare, $x_0^N f^q \in S$ per ogni $q > 0$ e quindi il sottoanello $S[f]$ del campo di frazioni di S è contenuto in $x_0^{-N} S$: se $g \in S[f]$, allora

$$\begin{aligned} g &= s_0 + f s_1 + f^2 s_2 + \dots = (x_0^N x_0^{-N})(s_0 + f s_1 + f^2 s_2 + \dots) \\ &= x_0^{-N} (x_0^N s_0 + f x_0^N s_1 + f^2 x_0^N s_2 + \dots) \in x_0^{-N} S. \end{aligned}$$

Visto che $x_0^{-N} S$ è un S -modulo finitamente generato e S è noetheriano, anche $S[f]$ è finitamente generato su S e otteniamo che f è integrale su S . Quindi ci sono elementi $a_i \in S$ tale che

$$f^m + a_{m-1} f^{m-1} + \dots + a_0 = 0.$$

Possiamo sostituire l'equazione con i parti in grado zero. Ma f stesso ha grado 0 e $S_0 = k$, quindi possiamo supporre che $a_i \in k$ senza cambiare l'equazione. Segue che f è integrale su k . Ma k è algebricamente chiuso e quindi $f \in k$. $\square$

Esercizio 3.16. Sia $\psi: S \rightarrow T$ un morfismo di anelli graduati. Sia

$$U = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}(T) \mid \psi(S_+) \not\subset \mathfrak{p}\}.$$

Allora $U \subset \text{Proj} S$ è aperto e ψ induce un morfismo

$$\varphi: U \rightarrow \text{Proj}(S).$$

Commento 3.17. Il morfismo φ può essere un isomorfismo, anche se ψ non lo è (simile a come abbiamo visto che $\text{Proj} S = \text{Proj} T$ non implica $S \simeq T$).

Esempio 3.18. Sia $\psi: k[x, y] \rightarrow k[x, y, z]$ l'inclusione. Allora $\psi(S_+) = \psi((x, y)) = (x, y)$ e $U = \mathbb{P}_k^2 \setminus \{(x, y)\}$ con $\varphi: U \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ dato in coordinate omogenei $[x : y : z] \mapsto [x : y]$.

Teorema 3.19. Un morfismo proiettivo $\varphi: X \rightarrow Y$ tra schemi noetheriani è proprio.

Proof. Per definizione di un morfismo proiettivo abbiamo che φ fattorizza come $X \rightarrow \mathbb{P}_Y^n \rightarrow Y$. Quindi otteniamo

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & \mathbb{P}_Y^n & \longrightarrow & \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \\ & \searrow i & \downarrow & & \downarrow \\ & & Y & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathbb{Z}) \end{array}$$

È sufficiente dimostrare che $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ è proprio usando Corollario 2.24: in questo caso il cambio di base è proprio, quindi $\mathbb{P}_Y^n \rightarrow Y$ è proprio; il morfismo $X \rightarrow \mathbb{P}_Y^n$ è un'immersione chiuso e quindi proprio; di conseguenza anche $X \rightarrow Y$ come composizione di morfismi propri è proprio. Dimostrare che $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ è proprio lasciamo come esercizio. $\square$

Commento 3.20. Essere proiettivo e essere proprio sono molto simile ma si può costruire esempi di schemi propri che non sono proiettivi. Per una varietà astratta X si sa:

- (1) Se X è di dimensione 1 e proprio allora è proiettivo.
- (2) Se X è di dimensione 2, non-singolare e proprio allora è proiettivo.
- (3) Ci sono esempi di X di dimensione 2, singolare e proprio ma non proiettivo.
- (4) Ci sono esempi di X di dimensione 3, non-singolare e proprio ma non proiettivo.

3.4. Proj globale. Invece di costruire Proj di un anello graduato S su $\text{Spec} S_0$, si può anche costruire $\text{Proj} \mathcal{F}$ di un fascio coerente graduato $\mathcal{F}$ su qualsiasi base B .

Lezione
6.11.

Un fascio quasicoerente graduato $\mathcal{F}$ su B è un fascio quasicoerente di $\mathcal{O}_B$ -moduli $\mathcal{F}_\nu$ tale che

$$\mathcal{F} = \bigoplus \mathcal{F}_\nu$$

con $\mathcal{F}_\nu \mathcal{F}_\mu \subset \mathcal{F}_{\nu+\mu}$ e $\mathcal{F}_0 = \mathcal{O}_B$. Quindi, dato un aperto affine $U = \text{Spec}(A)$ su B , abbiamo che $\mathcal{F}(U)$ è un anello graduato con $\mathcal{F}(U)_0 = A$.

Mettiamo $X_U = \text{Proj} \mathcal{F}(U)$, uno schema su U . Se $U \subset V$ è un'inclusione di aperti affini, abbiamo la mappa di restrizione

$$\psi: \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U).$$

La restrizione di ψ alla parte di grado 0 è la mappa di restrizione $\psi_0: \mathcal{O}_V(V) \rightarrow \mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_U(U)$. In particolare, ψ manda l'ideale irrilevante nell'ideale irrilevante e quindi induce un morfismo

$$\varphi: X_U \rightarrow X_V$$

che commuta con i morfismi $X_U \rightarrow U$, $X_V \rightarrow V$ e l'inclusione $U \hookrightarrow V$. Quindi possiamo usare i morfismi di restrizione per incollare i X_U in uno schema globale

$$X = \text{Proj} \mathcal{F} \rightarrow B.$$

Esempio 3.21. Abbiamo visto che $\mathbb{P}_A^n = \text{Proj} A[x_0, \dots, x_n]$. Visto che $A[x_0, \dots, x_n] \simeq \text{Sym}(A^{n+1})$ possiamo mettere

$$\mathbb{P}_B^n = \text{Sym}(\mathcal{O}_B^{\oplus n+1}),$$

che dá una terza possibilità di definire $\mathbb{P}_B^n$ per uno schema qualsiasi B .

Esempio 3.22. Più generale, sia $\mathcal{E}$ un fascio coerente su B . Allora definiamo

$$\mathbb{P}\mathcal{E} = \text{Proj}(\text{Sym}(\mathcal{E})) \rightarrow B,$$

il fibrato proiettivo associato a $\mathcal{E}$.

3.5. Fasci invertibili da moduli graduati. Come per Spec , si può definire anche per Proj fasci (quasicoerenti) associato a un modulo, che in questo caso deve essere graduato:

Sia B uno schema, e

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \dots$$

un fascio di $\mathcal{O}_B$ algebre graduate. Allora otteniamo come prima $\mathbb{P} = \text{Proj} \mathcal{A}$ dato dal Proj globale. Sia $\mathcal{M}$ un fascio quasicoerente su B con una struttura di $\mathcal{A}$ modulo graduato; c'è con una decomposizione

$$\mathcal{M} = \dots \oplus \mathcal{M}_i \oplus \mathcal{M}_{i+1} \oplus \dots$$

con mappe

$$\mathcal{A}_j \otimes_B \mathcal{M}_i \rightarrow \mathcal{M}_{i+j}$$

che soddisfanno le proprietà di un modulo (distributività, associatività, identità).

Allora possiamo definire un fascio $\widetilde{\mathcal{M}}$ su $\mathbb{P}$ così: Sia $U \subset B$ un aperto affine. Quindi $\mathcal{A}(U)$ è un anello graduato. Per ogni elemento omogeneo $f \in \mathcal{A}(U)$ abbiamo un aperto affine

$$\mathbb{P}_{U,f} = (\text{Proj} \mathcal{A}(U))_f = \text{Spec}(\mathcal{A}(U)[f^{-1}]_0) \subset \mathbb{P}.$$

Allora i $\mathbb{P}_{U,f}$ danno un ricoprimento di aperti affini di $\mathbb{P}$ e $\mathcal{M}(U)$ è un $\mathcal{A}(U)$ modulo graduato su ogni U . Sia $\mathcal{M}_{U,f}$ il $\mathcal{A}(U)[f^{-1}]_0$ -modulo

$$\mathcal{M}_{U,f} = (\mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{A}(U)} \mathcal{A}(U)[f^{-1}])_0.$$

Associato a $\mathcal{M}_{U,f}$ abbiamo un fascio quasicoerente su $\text{Spec}(\mathcal{A}(U)[f^{-1}]_0)$ e quelli si incollano per dare un fascio quasicoerente $\widetilde{\mathcal{M}}$ su $\mathbb{P}$.

Commento 3.23. Ogni fascio quasicoerente su $\text{Proj} \mathcal{A}$ è ottenuto in questo modo. Ma due fasci di moduli $\mathcal{M}$ possono dare lo stesso fascio.

Commento 3.24. In caso che $B = \text{Spec}(k)$, $\mathcal{A}$ è semplicemente una k -algebra graduata e $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$ -modulo graduato.

Esempio 3.25. Se prendiamo $\mathcal{M} = \mathcal{A}$, otteniamo il fascio strutturale $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}$. Dato $\mathcal{M}$ come sopra definiamo $\mathcal{M}(n)$ come lo stesso fascio di moduli ma con graduazione

$$\mathcal{M}(n)_i = \mathcal{M}_{n+i}$$

e con $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)$ lo fascio $\widetilde{\mathcal{A}}(n)$ associato a $\mathcal{A}(n)$.

Esempio 3.26. Sia $B = \text{Spec}(k)$, $\mathcal{A} = A = k[x, y]$ e $\mathcal{M} = M = A(1)$. Quindi $\mathbb{P} = \mathbb{P}_k^1$ e $U = \text{Spec}(k)$. Poi abbiamo

$$\mathbb{P}_{(\text{Spec}(k), x)} = \text{Spec}(k[x, y][x^{-1}]_0) \text{ e } \mathbb{P}_{(\text{Spec}(k), y)} = \text{Spec}(k[x, y][y^{-1}]_0)$$

e

$$M_{\text{Spec}(k), x} = (k[x, y] \otimes_{k[x, y]} k[x, y][x^{-1}]_0)_0 = \left\{ \frac{f}{x^{\deg(f)-1}} \mid f \in k[x, y], \deg(f) \neq 0 \right\}$$

perché $(k[x, y] \otimes_{k[x, y]} k[x, y][x^{-1}]) = k[x, y][x^{-1}]$ con $\deg(h \otimes \frac{g}{x^n}) = \deg(h) - 1 + \deg(g) - n$. Analogamente per

$$M_{\text{Spec}(k), y} = (k[x, y] \otimes_k k[x, y][y^{-1}])_0 = \left\{ \frac{f}{y^{\deg(f)-1}} \mid f \in k[x, y], \deg(f) \neq 0 \right\}.$$

Un elemento $\frac{f}{x^{\deg(f)-1}}$ definisce quindi anche un elemento $M_{\text{Spec}(k),y}$ se e solo se $\deg(f) = 1$. O in altre parole, le sezioni globali $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ sono $k[x, y]_1$. Più in generale abbiamo

$$\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = k[x_0, \dots, x_n]_m \text{ per ogni } m, n \geq 1.$$

Per $m > 0$, otteniamo in particolare che $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$ è generato da $k = \binom{n+m}{n}$ sezioni globali, dato da $x_0^{m_0} \dots x_n^{m_n}$ per ogni scelta di m_i tale che $\sum_i m_i = m$.

Se prendiamo invece $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ otteniamo sezioni locali $\frac{f}{x^{\deg(f)+1}}$ e $\frac{f}{y^{\deg(f)+1}}$ che non si estendono mai a sezioni globali. Anche qua abbiamo in generale

$$\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = \{0\} \text{ per ogni } m < 0.$$

Definizione 3.27. Sia X un Y -schema. Un fascio invertibile $\mathcal{P}$ su X si chiama molto ampio se esiste un immersione $i: X \rightarrow \mathbb{P}_Y^n$ tale che $\mathcal{P} \simeq i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_Y^n}(1)$. Il fascio si chiama ampio se $\mathcal{P}^{\otimes n}$ è molto ampio per un $n \in \mathbb{N}$.

Qua un morfismo si chiama un immersione se induce un isomorfismo tra X e un sottoschema aperto di un sottoschema chiuso di $\mathbb{P}_Y^n$.

Commento 3.28. Uno schema noetheriano X su k è proiettivo se e solo se X è proprio e amette un fascio molto ampio: se X è proiettivo, allora X è proprio (Teorema 3.19) e per definizione l'inclusione $i: X \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ dà il fascio molto ampio $i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(1)$. Vice versa, se X è proprio su k , anche $X \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ è proprio (Corollario 2.24 (5)) e quindi ha immagine chiusa e definisce un'immersione chiusa.

4. DIVISORI E FASCI INVERTIBILI

4.1. Divisori di Weil. In questa sezione supponiamo che X sia uno schema integrale, noetheriano, separato che è regolare in codimensione 1 (l'ultima proprietà vuole dire che ogni anello locale $\mathcal{O}_{X,x}$ di dimensione 1 è regolare).

Definizione 4.1. Un divisore primo Y di uno schema X è un sottoschema integrale chiuso di codimensione 1. Un divisore di Weil è una combinazione lineare $D = \sum_{i=1}^n n_i Y_i$ di divisori primi Y_i con $n_i \in \mathbb{Z}$. D si chiama effettivo se $n_i \geq 0$ per ogni i . Si scrive $\text{Div}(X)$ per il gruppo di divisori di Weil su X .

Una funzione razionale su X è un elemento del campo $K = \mathcal{O}_{\eta,X}$, dove η è il punto generico di X . Per ogni divisore primo D abbiamo il punto generico η_D di D e perché D ha codimensione 1, $\mathcal{O}_{\eta_D,X}$ è un anello di valutazione discreta con valutazione ν_D con campo di frazioni K (perché $\mathcal{O}_{\eta_D,X}$ è un dominio locale Noetheriano con ideale massimale principale e non è un campo). Definiamo l'ordine di zero/poli di una funzione razionale non-zero $f \in K^*$ lungo D come $\nu_D(f)$. C'è se $\nu_D(f) > 0$ diciamo che f ha un zero lungo D di ordine $\nu_D(f)$; e se $\nu_D(f) < 0$ diciamo che f ha un polo lungo D di ordine $-\nu_D(f)$.

Esempio 4.2. Se prendiamo come $D = \text{Spec}(k[x, y]/(x)) \subset \text{Spec}(k[x, y]) = \mathbb{A}^2$, allora η_D è il punto dato dal ideale primo (x) . Quindi $\mathcal{O}_{\eta_D,X} = k[x, y]_{(x)}$. Ogni elemento in $f \in K = k(x, y)$ si può scrivere come $f = x^n g$ con $g \notin (x)$ e $\nu_D(f) = n$. Per esempio, $\nu_D(\frac{y}{x}) = -1$, $\nu_D(x^2 - y) = 0$ e $\nu_D(xy) = 1$.

Sempre con gli assunzioni su X di sopra abbiamo:

Lemma 4.3. Sia $f \in K^*$. Allora ci sono solo un numero finito di divisori primi D tale che $\nu_D(f) \neq 0$.

Proof. Per ogni aperto affine $U = \text{Spec}(A) \subset X$ abbiamo $K = \text{Frac}(A)$. Possibilmente restringendo a U_f , possiamo scegliere $U = \text{Spec}(A) \subset X$ affine tale che f è regolare, c'è $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Il complemento $X \setminus U$ è chiuso e quindi un'unione finito di componenti irriducibili (X è noetheriano). In particolare, esiste solo un numero finito di divisori primi D con $D \cap U = \emptyset$ e quindi è sufficiente mostrare l'affermazione per U . Visto che $f \in \mathcal{O}_X(U)$, $\nu_D(f) \geq 0$. Poi $\nu_D(f) > 0$ se e solo se D è contenuto nello sottoschema chiuso Z di U definito da $f \cdot A$. Ma visto che X è noetheriano, Z contiene un numero finito di divisori primi. $\square$

Lezione 13.11. Quindi possiamo definire:

Definizione 4.4. (1) Dato $f \in K^*$, il divisore di Weil associato a f è

$$\operatorname{div}(f) = \sum_D \nu_D(f) D,$$

il divisore di zeri e poli di f . Un divisore D che ha la forma $\operatorname{div}(f)$ per una funzione razionale $f \in K^*$ si chiama divisore principale.

(2) Due divisori di Weil D, D' si chiamano linearmente equivalente e scriviamo $D \sim D'$ se $D - D'$ è principale.

Se $f, g \in K^*$, abbiamo che $\nu_D(fg) = \nu_D(f) + \nu_D(g)$ e $\nu_D(1) = 0$. In altre parole, div definisce un morfismo di gruppi da K^* con la moltiplicazione a $\operatorname{Div}(X)$ con l'addizione. Quindi l'immagine, i divisori principali, formano un sottogruppo e si scrive $\operatorname{Cl}(X)$ per il quoziente.

Esempio 4.5. (1) Per $X = \mathbb{A}_k^1$ abbiamo $K = k(x)$. Se prendiamo per esempio $f = x^2$, allora $\nu_D(f) = 0$ per $D \neq 0$ e $\nu_0(f) = 2$, e quindi $\operatorname{div}(f) = 2(0)$. Quindi $2(0) \sim 0$.

(2) Per $X = \mathbb{P}_k^1$ abbiamo anche $K = k(x)$. Se prendiamo un'altra volta $f = x^2$, allora $\nu_D(f) = 0$ per $D \neq [1 : 0], [0 : 1]$ e $\nu_{[0:1]}(f) = -2$ e $\nu_{[1:0]}(f) = 2$, quindi $\operatorname{div}(f) = 2(0) - 2(\infty)$. Quindi $2(0) \sim 2(\infty)$.

Entrambi si può generalizzare:

Esempio 4.6. Abbiamo che $\operatorname{Cl}(\mathbb{A}^n) = 0$. Sia $D \in \operatorname{Div}(\mathbb{A}^n)$ un divisore primo. Allora $D = \operatorname{Spec}(k[x_1, \dots, x_n]/(f))$ per un polinomio f irriducibile e abbiamo $\operatorname{div}(f) = D$. Quindi ogni divisore primitivo è principale e quindi tutti i divisori di Weil sono principali.

Proposizione 4.7. Sia $X = \mathbb{P}_k^n$ lo spazio proiettivo. Per un divisore di Weil $D = \sum n_i Y_i$ si definisce

$$\deg(D) = \sum n_i \deg(Y_i).$$

Sia H l'iperpiano $x_0 = 0$. Allora

- (1) Per ogni divisore D di grado d abbiamo $D \sim dH$
- (2) Per ogni $f \in K^*$ abbiamo $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$.
- (3) La mappa $\deg: \operatorname{Cl}(\mathbb{P}_k^n) \rightarrow \mathbb{Z}$ è un isomorfismo.

Proof. Iniziamo con (2): Sia $S = k[x_0, \dots, x_n]$ tale che $\mathbb{P}_k^n = \operatorname{Proj}(S)$. Se $g \in S$ è omogeneo di grado n possiamo scrivere $g = g_1^{n_1} \cdot \dots \cdot g_r^{n_r}$ con g_i irriducibile. Allora g_i definisce un ipersuperficie Y_i di grado $\deg(g_i)$ e possiamo definire $\operatorname{div}(g) = \sum_i n_i Y_i$ con $\deg(\operatorname{div}(g)) = \sum n_i \deg(Y_i) = \deg(g)$. Una funzione razionale $f \in K^*$ è dato da un quoziente $\frac{g}{h}$ con g, h omogeneo e $\deg(g) = \deg(h)$. Visto che $\operatorname{div}(f) = \operatorname{div}(g) - \operatorname{div}(h)$ otteniamo $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$. Per (1), sia D un divisore di grado d . Possiamo scrivere $D = D_1 - D_2$ per divisori effettivi D_1, D_2 di grado d_1, d_2 con $d_1 - d_2 = d$. Possiamo scrivere $D_i = \operatorname{div}(g_i)$ con g_i omogeneo di grado d_i : ogni ipersuperficie irriducibile di $\mathbb{P}_k^n$ corrisponde a un ideale principale generato da un elemento omogeneo. Prendendo prodotti, segue che ogni sottoschema di codimensione 1 è dato come il luogo di zeri di un singolo polinomio omogeneo. Allora $D - dH = \operatorname{div}(f)$ dove $f = \frac{g_1}{g_2 x_0^d}$ è una funzione razionale su $\mathbb{P}^n$.

(3) segue da (1) e (2) osservando che $\deg(H) = 1$. □

Proposizione 4.8. Sia $Z \subset X$ un sottoschema chiuso è $U = X \setminus Z$. Allora:

(1) Il morfismo

$$\varphi: \operatorname{Cl}(X) \rightarrow \operatorname{Cl}(U), \sum n_i Y_i \mapsto \sum n_i (Y_i \cap U)$$

è suriettivo.

(2) se $\operatorname{codim}(Z, X) \geq 2$, allora φ è un isomorfismo.

(3) Se Z è irriducibile di codimensione 1 esiste una successione esatta corta:

$$\mathbb{Z} \rightarrow \operatorname{Cl}(X) \rightarrow \operatorname{Cl}(U) \rightarrow 0.$$

- Proof.* (1) Se Y è un divisore primo su X allora $U \cap Y$ è vuoto o un divisore primo su U . Se $f \in K^*$ è una funzione razionale con $\text{div}(f) = \sum n_i Y_i$, possiamo vedere f anche come funzione razionale su U e otteniamo $\text{div}_U(f) = \sum n_i (Y_i \cap U)$. Quindi φ definisce un morfismo. È suriettivo, perché ogni divisore primo di U è la restrizione della sua chiusura. (2) Un divisore primo ha codimensione 1, quindi $U \cap Y$ non può essere vuoto in questo caso e φ è anche iniettivo. (3) Il nucleo di φ sono i divisori di Weil con supporto in Z . Se Z è irriducibile di codimensione 1, sono esattamente i multipli di Z . □

Esempio 4.9. Sia $A = k[x, y, z]/(xy - z^2)$ e $X = \text{Spec}(A)$ una superficie conica in $\mathbb{A}^3$. Allora $\text{Cl}(X) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ed è generato da una retta generatrice Y , per esempio dato da (y, z) . Infatti, Proposizione 4.8 dà

$$\mathbb{Z} \rightarrow \text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(X \setminus Y) \rightarrow 0. \quad (4)$$

Adesso Y come insieme è il luogo $y = 0$ su X . Come divisore invece abbiamo $\text{div}(y) = 2Y$: l'anello locale a Y in X è dato da $A_{(y,z)} \simeq k[x, x^{-1}, z]$ con ideale massimale generato da z . Visto che $y = \frac{z^2}{x}$, y ha un zero di ordine 2 lungo Y .

Otteniamo che $X \setminus Y = \text{Spec} A_y$ e $A_y = k[x, y, y^{-1}, z]/(xy - z^2)$. In A_y abbiamo $x = \frac{z^2}{y}$ e quindi $A_y \simeq k[y, y^{-1}, z]$. Segue che $\text{Spec}(A_y)$ è un sottoschema aperto di $\mathbb{A}^2 = \text{Spec}(k[y, z])$ e quindi $\text{Cl}(X \setminus Y) = 0$. Quindi otteniamo da (4) che $\text{Cl}(X)$ è generato da Y e visto che $\text{div}(y) = 2 \cdot Y$ abbiamo $2 \cdot Y = 0$ in $\text{Cl}(X)$.

Rimane vedere che Y non è principale, che si può dimostrare che in questo caso (X essendo normale) è equivalente a (y, z) , l'ideale che definisce Y , è principale. Sia $\mathfrak{m} = (x, y, z)$ l'ideale massimale del vertice di X . Allora $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ è di dimensione 3 come spazio vettoriale su k generato dai immagini di x, y e z . Se Y fosse principale, allora l'immagine di (y, z) in $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ avrebbe dimensione 0 o 1. Ma in questo caso lo contiene l'immagine di y e z , quindi ha dimensione 2 e (y, z) non è principale.

Esempio 4.10. Per un altro esempio, si può calcolare che

$$\text{Cl}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

dove ogni divisore D è l'insieme di zeri di un polinomio bi-omogeneo f e l'invariante che descrive $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(D)$ è il bigrado di f .

4.2. Divisori di Cartier. Adesso vogliamo introdurre una nozione di divisore che non ha bisogno dei restrizioni su X che erano necessario per i divisori di Weil (noetheriano, separato, integrale e regolare in codimensione 1).

Iniziamo con una generalizzazione del concetto del campo di funzioni: Sia X uno schema. Per $U = \text{Spec}(A) \subset X$ aperto affine sia $S \subset A$ l'insieme di elementi che non sono divisori di 0 e sia $K(U)$ la localizzazione di A in S . Più generale, per un aperto $U \subset X$ qualsiasi, sia $S(U)$ l'insieme di elementi di $\mathcal{O}_X(U)$ che non sono divisori di zero in ogni anello locale $\mathcal{O}_x$ con $x \in U$. Allora gli anelli $S(U)^{-1}\mathcal{O}_X(U)$ formano un pre-fascio e chiamiamo il fascio associato $\mathcal{K}$ il fascio delle anelli totali delle frazioni (sheaf of total quotient rings). Chiamiamo $\mathcal{K}^*$ e $\mathcal{O}^*$ il fascio di elementi invertibili di $\mathcal{K}$ e $\mathcal{O}_X$.

Definizione 4.11. Sia X uno schema. Un divisore di Cartier è una sezione globale del fascio $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$.

Più esplicitamente, un divisore di Cartier è dato da un ricoprimento aperto $X = \bigcup_i U_i$ e per ogni U_i un elemento $f_i \in \mathcal{K}^*(U_i)$ (= una funzione razionale) tale che per ogni i, j abbiamo $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$ (= una funzione regolare senza zeri).

Definizione 4.12. Un divisore di Cartier si chiama principale se è nell'immagine della mappa

$$\mathcal{K}^*(X) \rightarrow \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*(X).$$

Due divisori di Cartier si chiamano linearmente equivalente se la loro differenza è un divisore principale.

In generale le nozioni di divisori Cartier e Weil non coincidono (come abbiamo visto, il divisore di Weil in Esempio 4.9 non è principale vicino 0). Ma se supponiamo che X ha le proprietà per cui ha senso di parlare di divisori di Weil e di più che tutti i anelli locali $\mathcal{O}_{X,x}$ sono domini a fattorizzazione unica (in cui caso X si chiama localmente fattoriale), le due nozioni coincidono:

Proposizione 4.13. *Sia X integrale, separato, noetheriano, regolare in codimensione 1 e localmente fattoriale. Allora, il gruppo di divisori di Weil è isomorfo al gruppo di divisori di Cartier. Tramite questa identificazione, i divisori di Weil principali corrispondono ai divisori di Cartier principali.*

Commento 4.14. Infatti, regolare in codimensione 1 segue dalle altre assunzioni.

Commento 4.15. Visto che un anello locale regolare è un dominio a fattorizzazione unica, schemi regolari sono localmente fattoriali. Quindi una varietà regolare soddisfa le assunzioni della proposizione.

Proof. Visto che X è integrale, $\mathcal{K}$ corrisponde al fascio costante $\mathcal{K}(U) = K$, dove K è il campo di funzioni $K = \mathcal{O}_{X,\eta}$.

Dato un divisore di Cartier $\{(U_i, f_i)\}$ definiamo un divisore di Weil come segue. Per ogni divisore primo D prendiamo il coefficiente n_D come $\nu_D(f_i)$ per un U_i con $D \cap U_i \neq \emptyset$. Se abbiamo un altro j con $U_j \cap D \neq \emptyset$, allora f_i/f_j è invertibile su $U_i \cap U_j$ e quindi $\nu_D(f_i/f_j) = 0$ e $\nu_D(f_i) = \nu_D(f_j f_i/f_j) = \nu_D(f_j) + 0$. Quindi $\sum_D n_D D$ è ben definito. Perché X è noetheriano, segue che la somma è finita e quindi otteniamo un divisore di Weil associato al divisore di Cartier.

Viceversa, sia D un divisore di Weil su X e $x \in X$ un punto. Allora D definisce un divisore di Weil D_x su $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$. Ma $\mathcal{O}_{X,x}$ è un dominio a fattorizzazione unica e quindi $\text{Cl}(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})) = 0$ (Esercizio). Quindi $D_x = \text{div}(f_x)$ dove $f_x \in K$. Quindi la restrizione di D e $\text{div}(f_x)$ coincidono su $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ quindi sono diversi solo rispetto a divisori primi D che non passano per x . C'è un numero finito di tali D che hanno un coefficiente non-zero in D o $\text{div}(f_x)$ e quindi c'è un aperto U_x su cui D e $\text{div}(f_x)$ coincidono. Variando x in U_x danno un ricoprimento di X e assieme con i f_x un divisore di Cartier. $\square$

Lezione
17.11.

4.3. Fasci invertibili e sistemi lineari.

Definizione 4.16. Un fascio $\mathcal{F}$ di $\mathcal{O}_X$ moduli su uno schema X si chiama localmente libero se esiste un ricoprimento di X con aperti U tale che $\mathcal{F}|_U \simeq \mathcal{O}_X|_U^{\oplus r}$. In questo caso, r si chiama il rango del fascio localmente libero. Se $\mathcal{F}$ è localmente libero di rango 1, si chiama invertibile.

Commento 4.17. Il nome 'invertibile' viene dal fatto che se $\mathcal{F}$ è invertibile esiste $\mathcal{F}^{-1}$ tale che $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}^{-1} \simeq \mathcal{O}_X$ (Esercizio). Quindi i fasci invertibili formano un gruppo tramite il prodotto tensoriale con elemento neutrale $\mathcal{O}_X$, che si chiama il gruppo di Picard $\text{Pic}(X)$.

Esempio 4.18. I fasci $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)$ definito in Esempio 3.25 sono invertibili con

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)^{-1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-n)$$

e più generale

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n+m).$$

Sia D un divisore di Cartier dato da $\{(U_i, f_i)\}$ su uno schema X . Definiamo il sottofascio di $\mathcal{K}$ associato a D , $\mathcal{L}(D)$, come il sotto- $\mathcal{O}_X$ -modulo generato da f_i^{-1} su U_i . Questo è ben definito, perché f_i/f_j è invertibile su $U_i \cap U_j$ e quindi f_i^{-1} e f_j^{-1} generano lo stesso $\mathcal{O}_X$ -modulo su $U_i \cap U_j$.

Esempio 4.19. Il divisore $D = 1 \cdot [1 : 0]$ su $\mathbb{P}^1$ è dato da $\{(U_x, y/x = y'), (U_y, 1)\}$. Quindi $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(D)$ ha sezioni $\frac{f}{x^{\deg(f)}} \cdot \frac{x}{y} = \frac{f}{x^{\deg(f)-1}y}$ su U_x e sezioni in $\mathcal{O}_{U_y}(U_y)$ su U_y . Moltiplicazione con y da un isomorfismo con $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ (cf. Esempio 3.26).

Proposizione 4.20. *Sia X uno schema. Allora.*

- (1) *Per ogni divisore di Cartier D , $\mathcal{L}(D)$ è un fascio invertibile. La mappa $D \mapsto \mathcal{L}(D)$ da una biiezione tra divisori di Cartier e sottofasci invertibili di $\mathcal{K}$.*
- (2) *$\mathcal{L}(D_1 - D_2) \simeq \mathcal{L}(D_1) \otimes \mathcal{L}(D_2)^{-1}$.*
- (3) *$D_1 \sim D_2$ se e solo se $\mathcal{L}(D_1) \simeq \mathcal{L}(D_2)$.*

Proof. (1) Visto che $f_i \in \mathcal{K}^*(U_i)$, la mappa $\mathcal{O}_{U_i} \rightarrow \mathcal{L}(D)|_{U_i}, 1 \mapsto f_i^{-1}$ è un isomorfismo e quindi $\mathcal{L}(D)$ è invertibile. Il divisore di Cartier D può essere ricostruito da $\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{K}$ prendendo come f_i su U_i l'inverso di un generatore locale che da per ogni sottofascio invertibile di $\mathcal{K}$ un divisore di Cartier.

- (2) Se D_1 è localmente dato da f_i e D_2 da g_i , allora $D_1 - D_2$ è localmente dato da $f_i^{-1}g_i$ e quindi $\mathcal{L}(D_1 - D_2) = \mathcal{L}(D_1) \cdot \mathcal{L}(D_2)^{-1}$ come sottofascio di $\mathcal{K}$. Come fascio astratto questo è isomorfo a $\mathcal{L}(D_1) \otimes \mathcal{L}(D_2)^{-1}$.
- (3) Usando 2), è sufficiente dimostrare che $D = D_1 - D_2$ è principale se e solo se $\mathcal{L}(D) \simeq \mathcal{O}_X$. Se D è principale, D è definito da $f \in \mathcal{K}^*(X)$. Allora $\mathcal{L}(D)$ è globalmente generato da f e $1 \mapsto f^{-1}$ da un isomorfismo $\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{L}(D)$. Viceversa, dato un tale isomorfismo, l'immagine di 1 da un elemento di $\mathcal{K}^*(X)$ che definisce D .

□

Corollario 4.21. *Su ogni schema X , $D \mapsto \mathcal{L}(D)$ da un morfismo iniettivo tra il gruppo $\text{CaCl}(X)$ di divisori di Cartier modulo equivalenza lineare in $\text{Pic}(X)$.*

Commento 4.22. In generale, la mappa $\text{CaCl}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$ non è suriettivo, perchè è possibile che esistono fasci invertibili che non si può realizzare come sottofasci di $\mathcal{K}^*$. Ma per esempio se X è integrale, la mappa è suriettiva.

Esempio 4.23. $\text{Pic}(\mathbb{P}_k^n) \simeq \mathbb{Z}$ dove $1 \mapsto \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(1)$: Abbiamo visto che $\text{Cl}(\mathbb{P}_k^n) \simeq \mathbb{Z}$ generato dalla classe di un iperpiano. Visto che $\mathbb{P}_k^n$ è integrale è localmente fattoriale abbiamo

$$\text{Cl}(\mathbb{P}_k^n) \simeq \text{CaCl}(\mathbb{P}_k^n) \simeq \text{Pic}(\mathbb{P}_k^n).$$

Tramite queste identificazioni, l'iperpiano corrisponde a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(1)$ (cf. Esempio 4.19 per $n = 1$).

Una ragione per cui fasci invertibili sono utili è che si può usargli per descrivere morfismi in $\mathbb{P}^n$.

Definizione 4.24. Un fascio $\mathcal{F}$ su X si chiama globalmente generato se ci sono sezioni globali $\{s_i\}_i$ in $\Gamma(X, \mathcal{F})$ tale che per ogni $x \in X$ la spiga $\mathcal{F}_x$ è generato dagli immagini delle s_i in $\mathcal{O}_{X,x}$.

Proposizione 4.25. *Sia A un anello e X uno schema su A .*

- (1) *Sia $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}_A^n$ un A -morfismo. Allora $\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(1)$ è un fascio invertibile generato da sezioni globali $s_i = \varphi^*x_i, i = 0, \dots, n$.*
- (2) *Viceversa, se $\mathcal{L}$ è un fascio invertibile su X e $s_0, \dots, s_n$ sezioni globali che generano $\mathcal{L}$, allora esiste un unico A -morfismo $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}_A^n$ tale che $\mathcal{L} \simeq \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(1)$ e $s_i = \varphi^*x_i$.*

Proof. (1) Sappiamo già che $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(1)$ è invertibile e che i x_i definiscono sezioni globali. Visto che non c'è un punto in cui i x_i vaniscono, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(1)$ è globalmente generato dai x_i . Quindi le stesse proprietà sono anche vero per il pull back $\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(1)$ e φ^*x_i .

- (2) Viceversa, sia $\mathcal{L}$ globalmente generato da sezioni globali $s_0, \dots, s_n$. Per ogni i sia

$$X_i = \{x \in X \mid (s_i)_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{L}_x\}.$$

Allora X_i è aperto e siccome i s_i generano $\mathcal{L}$, i X_i danno un ricoprimento di X . Definiamo un morfismo $\varphi_i: X_i \rightarrow U_i$ dove $U_i \simeq \text{Spec}(A[x'_1, \dots, x'_n])$ è l'aperto affine standard con $x'_j = \frac{x_j}{x_i}$: φ_i è dato dal morfismo su anelli

$$A[x'_1, \dots, x'_n] \rightarrow \mathcal{O}_{X_i}(X_i), x'_j \mapsto s_j/s_i.$$

Incollando i φ_i dà il morfismo $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}_A^n$ che cerchiamo.

□

Esempio 4.26. Se prendiamo $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)$ abbiamo una base delle sezioni globali dato da x^3, x^2y, xy^2, y^3 . La mappa che corrisponde a questi sezioni è $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3, [x : y] \mapsto [x^3 : x^2y : xy^2 : y^3]$ (twisted cubic). Se prendiamo invece solo x^3, y^3 otteniamo la mappa $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1, [x : y] \mapsto [x^3 : y^3]$.

Commento 4.27. Se $\mathcal{L}$ non è generato dai $s_0, \dots, s_n$, allora nonostante definiscono un morfismo $U \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ dove $U \subset X$ è l'aperto (possibilmente vuoto) su cui i s_i generano $\mathcal{L}$ (= i punti di X dove almeno una dei s_i non vanisce).

Commento 4.28. Un fascio molto ampio quindi in particolare è generato da sezioni globali. Il viceversa non è sempre vero, perché il morfismo in Proposizione 4.25 non è necessariamente un immersione (come la mappa $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ nel esempio precedente).

Proposizione 4.29. Sia k algebricamente chiuso, X uno schema proiettivo su k e $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ un morfismo che corrisponde a $\mathcal{L}$ e $s_0, \dots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ come sopra. Sia $V \subset \Gamma(X, \mathcal{L})$ il sottospazio generato dai s_i . Allora φ è un'immersione chiusa se e solo se

- (1) elementi di V separano punti: per ogni due punti distinti chiusi $p, q \in X$ esiste $s \in V$ tale che $s \in \mathfrak{m}_p \mathcal{L}_p$ ma $s \notin \mathfrak{m}_q \mathcal{L}_q$ o viceversa; e
- (2) elementi di V separano vettori tangenti: per ogni punto chiuso $p \in X$, l'insieme $\{s \in V \mid s_p \in \mathfrak{m}_p \mathcal{L}_p\}$ genera $\mathfrak{m}_p \mathcal{L}_p / \mathfrak{m}_p^2 \mathcal{L}_p$ come spazio vettoriale su k

Proof. Saltato, cf. Hartshorne Proposition II.7.3. □

Definizione 4.30. Un divisore di Cartier D dato da $\{(U_i, f_i)\}_i$ si chiama effettivo se $f_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$. Il sottoschema chiuso Y associato a D è il sottoschema che corrisponde al fascio di ideali $\mathcal{I}_Y$ localmente generato dai f_i . In questo caso abbiamo che $\mathcal{I}_Y \simeq \mathcal{L}(-D)$.

Sia $\mathcal{L}$ un fascio invertibile e $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ una sezione globale non-zero. Definiamo un divisore di Cartier effettivo $(s)_0$ associato a s come segue. Sia U un aperto di X su cui $\mathcal{L}$ è triviale e sia $\varphi: \mathcal{L}|_U \rightarrow \mathcal{O}_U$ una trivializzazione. Allora $\varphi(s) \in \mathcal{O}_U(U)$. Variando U , la collezione $\{(U, \varphi(s))\}$ definisce un divisore di Cartier effettivo.

Esempio 4.31. Sia $D = 1 \cdot [1 : 0]$ come in Esempio 4.19. Sezioni di $\mathcal{L}(D)$ sono $\frac{f}{x^{\deg(f)}} \cdot \frac{x}{y} = \frac{f}{x^{\deg(f)-1}y}$ su U_x e $\mathcal{O}_{U_y}(U_y)$ su U_y . Quindi una trivializzazione è dato da moltiplicazione con $\frac{y}{x}$ su U_x e 1 su U_y . Una sezione globale è per esempio dato da $s = \frac{x}{y}$ che ha divisore associato $[1 : 0]$ (che non è diverso dal divisore principale associato a $\frac{x}{y}$ visto come funzione razionale).

Proposizione 4.32. Sia X una varietà non-singolare proiettiva su un campo algebricamente chiuso k . Sia D un divisore su X e $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}(D)$. Allora:

- (1) per ogni sezione globale non-zero $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ abbiamo $(s)_0 \sim D$
- (2) ogni divisore effettivo che è linearmente equivalente a D è $(s)_0$ per un $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ e
- (3) due sezioni $s, s' \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ danno lo stesso divisore se e solo se $s = \lambda s'$ per un $\lambda \in k^*$.

Proof. (1) Visto che $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}(D)$, possiamo vedere $\mathcal{L}$ come sottofascio di $\mathcal{K}$. Siccome X è una varietà e quindi integrale, $\mathcal{K}$ è il fascio costante, dato da K . Quindi possiamo vedere s come un elemento di K , una funzione razionale su X .

Se D è dato da $\{(U_i, f_i)\}_i$, allora $\mathcal{L}$ è localmente generato da f_i^{-1} e otteniamo un isomorfismo locale $\mathcal{L}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{O}_{U_i}$ dato da moltiplicazione con f_i . Quindi $D' = (s)_0$ è localmente definito da $f_i f$ e $D' = D + \text{div}(f)$.

(2) Viceversa, se D' è effettivo con $D' = D + \text{div}(f)$ allora il ordine di poli di f lungo un divisore Y è minore o uguale a quello delli f_i che localmente definiscono D . Quindi possiamo vedere f come una sezione globale di $\mathcal{L}(D)$.

(3) Se $(s)_0 = (s')_0$ allora s e s' corrispondono a funzioni razionali $f, f' \in K$ tale che $\text{div} \frac{f}{f'} = 0$. Quindi $\frac{f}{f'} \in \mathcal{O}_X^*(X)$. Ma visto che X è proiettivo e k algebricamente chiuso, segue $\frac{f}{f'} \in k^*$ usando Proposizione 3.15. □

Definizione 4.33. Un sistema lineare completo $|D|$ su una varietà proiettiva nonsingolare è l'insieme di tutti divisori effettivi $D' \sim D$.

Dalla proposizione precedente segue che $|D| \simeq \mathbb{P}\Gamma(X, \mathcal{L}(D))$. Più general, un sistema lineare $\mathfrak{d}$ è un sottospazio lineare di $|D|$. La dimensione di un sistema lineare è la sua dimensione come spazio lineare proiettivo.

Definizione 4.34. Un punto $p \in X$ si chiama punto di base di un sistema lineare $\mathfrak{d}$ se p è contenuto nel supporto di ogni divisore $D \in \mathfrak{d}$.

Commento 4.35. $p \in X$ è punto di base se e solo se per ogni $s \in V$ abbiamo che $s_p \in \mathfrak{m}_p \mathcal{L}_p$. In particolare $\mathfrak{d}$ è senza punti di base se e solo se $\mathcal{L}$ è generato dai sezioni in V .

Commento 4.36. Possiamo riformulare Proposizione 4.29 in questo linguaggio: Sia $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^n$ un morfismo che corrisponde al sistema lineare senza punti di base $\mathfrak{d}$. Allora φ è un immersione chiusa se e solo se

- (1) $\mathfrak{d}$ separa punti: per ogni $p, q \in X$ esiste $D \in \mathfrak{d}$ con $p \in \text{supp}(D)$ ma $q \notin \text{supp}(D)$.
- (2) $\mathfrak{d}$ separa vettori tangenti: per ogni $p \in X$ e $t \in T_p X = (\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2)^*$ esiste $D \in \mathfrak{d}$ tale che $p \in \text{supp}(D)$ ma $t \notin T_p(D)$ (dove per l'ultima affermazione vediamo D come un sottoschema chiuso, localmente principale).

Esempio 4.37. Il morfismo $\varphi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$ dato da $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)$ e x^3, x^2y, xy^2, y^3 di esempio 4.26 da un immersione chiusa. Il sistema lineare in questo caso sono i luoghi di zeri di polinomi omogenei di grado 3 quindi tutti i divisori di grado 3 su $\mathbb{P}^1$. Questi divisori si può anche vedere come i intersezioni di $\varphi(\mathbb{P}^1)$ con iperpiani in $\mathbb{P}^3$.

Il morfismo $\varphi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ dato dalle sezioni x^3, y^3 non è un immersione chiusa. Per $[0 : 1]$ e $[1 : 0]$ non separa vettori tangenti, mentre per ogni altro punto ci sono 3 punti nella fibra di φ e quindi in questo caso φ non separa punti.