FOGLIO DI ESERCIZI V, PER IL 24.11.25

CINZIA CASAGRANDE E KARL CHRIST

Esercizio 5.1. Siano I e J ideali omogenei di $S = A[x_0, \dots, x_n]$. Allora

(1) la saturazione $\overline{I}$ è un ideale omogeneo
(2) $\mathrm{Proj} S/I = \mathrm{Proj} S/\overline{I}$
(3) $\mathrm{Proj} S/\overline{I} = \mathrm{Proj} S/\overline{J}$ se e solo se $\overline{I} = \overline{J}$.

Esercizio 5.2. Sia $\psi\colon S \to T$ un morfismo di annelli graduati. Sia

$$U = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(T) \mid \psi(S_+) \not\subset \mathfrak{p}\}.$$

Allora $U \subset \mathrm{Proj}(T)$ è aperto e ψ induce un morfismo

$$\varphi\colon U \to \mathrm{Proj}(S).$$

Dare un esempio in cui $U \neq \mathrm{Proj}(T)$. Dare un esempio in cui $U = \mathrm{Proj}(T)$ e φ è un isomorfismo, ma ψ non lo è.

Esercizio 5.3. Lo spazio proiettivo pesato $\mathbb{P}^k(d_1, d_2, \dots, d_n)$ si ottiene come $\mathrm{Proj}(k[x_1, \dots, x_n])$ dichiarando che x_i ha peso (o grado) d_i. Dimostrare che $\mathbb{P}(m, n)$ è isomorfo a $\mathbb{P}^1$ e che

$$\mathbb{P}(1, 1, 2) \cong \mathrm{Proj}(k[u, v, w, z]/(uw - v^2))$$

dove $k[u, v, w, z]/(uw - v^2)$ ha la graduazione standard.

Esercizio 5.4. Sia C una curva irreducibile di grado d in $\mathbb{P}^2$ (c'è $C = V(f)$ con f irreducibile, omogeneo e di grado d). Dimostrare che $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^2 \setminus C) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Esercizio 5.5. Sia A un dominio a fattorizzazione unica noetheriano e $X = \mathrm{Spec}(A)$. Allora $\mathrm{Cl}(X) = 0$.

Esercizio 5.6. Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ fasci invertibili (localmente libero di rango 1) su uno schema X. Dimostrare che:

(1) Anche $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ è invertibile.
(2) $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ soddisfa $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}^{-1} \simeq \mathcal{O}_X$.

Esercizio 5.7.

(1) Dimostrare che se X è uno schema di tipo finito su un anello noetheriano A ed esiste un fascio invertibile ampio su X, allora X è separato.
(2) Sia X la retta affine su un campo k con la doppia origine. Calcolare $\mathrm{Pic}(X)$ e controllare esplicitamente che non esiste un fascio invertibile ampio su X.