1 L'operatore aggiunto

Di cosa si tratta? In analisi funzionale, l'*aggiunto* di un operatore, chiamato anche *operatore hermitiano aggiunto*, generalizza il trasposto coniugato di una matrice quadrata al caso infinito dimensionale e il concetto di complesso coniugato di un numero complesso. Ogni operatore lineare limitato su uno spazio di Hilbert ha un corrispondente operatore aggiunto.

1.1 Definizione e proprietà fondamentali

1.1 Teorema. *$T \in \mathscr{L}(H_1, H_2) \Rightarrow$ Esiste un unico $T^* \in \mathscr{L}(H_2, H_1)$ tale che*

$$(Tx, y)_{H_2} = (x, T^*y)_{H_1} \qquad \forall\, x \in H_1 \quad \forall\, y \in H_2.$$

T^* si dice l'operatore aggiunto di T.

DIMOSTRAZIONE. Sia $y \in H_2$ e $\phi_y x := (Tx, y)_{H_2}$.

$$|\phi_y x| = |(Tx, y)_{H_2}| \leqslant \|Tx\|_{H_2}\|y\|_{H_2} \leqslant \|T\|_{\mathscr{L}(H_1,H_2)}\|y\|_{H_2}\|x\|_{H_1} \quad \forall\, x \in H_1.$$

$\Rightarrow \phi_y \in H_1'$, $\|\phi_y\| \leqslant \|T\|_{\mathscr{L}(H_1,H_2)}\|y\|_{H_2}$.

Teorema di Riesz $\Rightarrow \exists!\ \hat{y} = \hat{y}(y) \in H_1 \quad \forall\, x \in H_1 : \quad \phi_y x = (x, \hat{y})_{H_1}, \quad \|\hat{y}\|_{H_1} = \|\phi_y\|$.

Definire $T^* : H_2 \to H_1$, $T^*y = \hat{y}(y)$.

T^* è lineare:

$$\begin{aligned}(z, T^*(\lambda x + y))_{H_1} &= (Tz, \lambda x + y)_{H_2} = \overline{\lambda}(Tz, x)_{H_2} + (Tz, y)_{H_2} \\ &= (z, \lambda T^*x)_{H_1} + (z, T^*y)_{H_1} = (z, \lambda T^*x + T^*y)_{H_1} \qquad \forall\, z \in H_1\end{aligned}$$

$\Rightarrow T^*(\lambda x + y) = \lambda T^*x + T^*y$.

T^* è limitato:

$$\|T^*y\|_{H_1} = \|\hat{y}(y)\|_{H_1} = \|\phi_y\| \leqslant \|T\|_{\mathscr{L}(H_1,H_2)}\|y\|_{H_2} \qquad \forall\, y \in H_2.$$

$\Rightarrow \|T^*\|_{\mathscr{L}(H_2,H_1)} \leqslant \|T\|_{\mathscr{L}(H_1,H_2)}$. ■

1.2 Esempio. *Siano $H = \ell^2(\mathbb{N})$ e $L, R \in \mathscr{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ con*

$$\begin{aligned}L(x_1, x_2, x_3, \ldots) &= (x_2, x_3, x_4 \ldots) \qquad (\text{"left shift"}), \\ R(x_1, x_2, x_3, \ldots) &= (0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \qquad (\text{"right shift"}).\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}(L(x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2 \ldots)) &= ((x_2, x_3, \ldots), (y_1, y_2 \ldots)) = x_2y_1 + x_3y_2 + \ldots \\ &= ((x_1, x_2, \ldots), (0, y_1, \ldots)) = ((x_1, x_2, \ldots), R(y_1, y_2 \ldots)),\end{aligned}$$

$\Rightarrow L^* = R$. *Analogamente:* $R^* = L$.

1.3 Esempio. *Per* $f \in L^2([1,2])$ *definiamo*

$$(Tf)(x) = f(\sqrt{x}), \qquad 1 \leqslant x \leqslant 4.$$

Definisce $T : L^2([1,2]) \to L^2([1,4])$ *limitato con* $\|T\| \leqslant 2$*:*

$$\|Tf\|^2_{L^2([1,4])} = \int_1^4 |f(\sqrt{x})|^2\,dx \overset{y=\sqrt{x}}{=} \int_1^2 |f(y)|^2 2y\,dy \leqslant 4\|f\|^2_{L^2([1,2])}.$$

Determiniamo T^**:*

$$(Tf,g) = \int_1^4 f(\sqrt{x})\overline{g(x)}\,dx \overset{y=\sqrt{x}}{=} \int_1^2 f(y)\overline{g(y^2)2y}\,dy = (f, T^*g),$$

dove T^*g, $g \in L^2([1,2])$ *definito da*

$$(T^*g)(y) = 2yg(y^2), \qquad 1 \leqslant y \leqslant 2.$$

1.4 Esempio. *Siano* $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ *e* $k : U \times V \to \mathbb{C}$ *misurabili. L'operatore integrale* T *su* V *con nucleo integrale* k *associa a funzioni* $f : V \to \mathbb{C}$ *la funzione* $Tf : U \to \mathbb{C}$ *tramite*

$$\boxed{(Tf)(u) = \int_V k(u,v)f(v)\,dv, \qquad u \in U.}$$

Supponiamo che esistono $c_1, c_2 \geqslant 0$ *tale che*

$$\int_U |k(u,v)|\,du \leqslant c_1, \quad \int_V |k(u,v)|\,dv \leqslant c_2 \qquad \text{quasi ovunque.}$$

Allora $T \in \mathscr{L}(L^2(V), L^2(U))$ *con* $\|T\| \leqslant \sqrt{c_1 c_2}$ *("Lemma di Schur"). L'operatore aggiunto* T^* *è l'operatore integrale con nucleo* $k^{(*)}(v,u) := \overline{k(u,v)}$*, cioè*

$$\boxed{(T^*g)(v) = \int_U \overline{k(u,v)}g(u)\,du, \qquad v \in V.}$$

In fatti, sfruttando le ipotesi, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz ed il Teorema di Fubini-Tonelli, si trova:

$$\begin{aligned}
|(Tf)(u)|^2 &= \left|\int_V k(u,v)f(v)\,dv\right|^2 \leqslant \left[\int_V |k(u,v)|^{\frac{1}{2}}\,|k(u,v)|^{\frac{1}{2}}\,|f(v)|\,dv\right]^2 \\
&\leqslant \left(\int_V |k(u,v)|\,dv\right) \cdot \left[\int_V |k(u,v)|\,|f(v)|^2\,dv\right] \\
&\leqslant c_2 \int_V |k(u,v)|\,|f(v)|^2\,dv \\
\Rightarrow \|Tf\|^2_{L^2(U)} &\leqslant c_2 \int_{U\times V} |k(u,v)|\,|f(v)|^2\,dvdu \leqslant c_1\,c_2 \int_V |f(v)|^2\,dv \\
&= c_1\,c_2\,\|f\|^2_{L^2(V)}.
\end{aligned}$$

La seconda affermazione è una conseguenza immediata della definizione di operatore aggiunto e del Teorema di Fubini-Tonelli. Infatti, per ogni $f \in L^2(V)$, $g \in L^2(U)$, si ha

$$\begin{aligned}(Tf, g)_{L^2(U)} &= \int_U \left[\int_V k(u,v)\, f(v)\, dv\right] \overline{g(u)}\, du \\ &= \int_{U\times V} k(u,v)\, f(v)\, \overline{g(u)}\, dvdu \\ &= \int_V f(v) \overline{\left[\int_U \overline{k(u,v)}\, g(u)\, du\right]} dv = (f, T^* g)_{L^2(V)},\end{aligned}$$

con

$$(T^* g)(v) = \int_U \overline{k(u,v)}\, g(u)\, du = \int_U k^{(*)}(v,u)\, g(u)\, du.$$

1.5 Teorema. *Siano $S, T \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$, $R \in \mathscr{L}(H_2, H_3)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Allora valgono:*

a) $(T+S)^* = T^* + S^*$, $(\lambda T)^* = \overline{\lambda}\, T^*$ *(cioè la mappa $T \mapsto T^*$ è anti-lineare).*

b) $(RT)^* = T^* R^*$

c) $(T^*)^* = T$

d) *T invertibile $\iff$ T^* invertibile. In questo caso:* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

e) $\|T^*\| = \|T\| = \|T^*T\|^{1/2}$ *(in particolare, la mappa $T \mapsto T^*$ è continua).*

Dimostrazione. a) $((\lambda T + S)x, y) = \lambda(Tx, y) + (Sx, y) = \lambda(x, T^*y) + (x, S^*y)$
$= (x, \bar{\lambda} T^* y + S^* y) = (x, (\overline{\lambda} T^* + S^*)y)$.

b) $(RTx, y) = (R(Tx), y) = (Tx, R^*y) = (x, T^*R^*y) = (x, (RT)^*y)$.

c) $(T^*x, y) = \overline{(y, T^*x)} = \overline{(Ty, x)} = (x, Ty) = (x, (T^*)^*y)$.

d) "$\Rightarrow$": $I = TT^{-1} \overset{b)}{\Rightarrow} I = I^* = (T^{-1})^* T^*$, $I = T^{-1}T \overset{b)}{\Rightarrow} I = I^* = T^*(T^{-1})^*$
$\Rightarrow (T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

"$\Leftarrow$": Applicare "$\Rightarrow$" a T^*, notando che $(T_*)_* = T$.

e) Sappiamo $\|T^*\| \leqslant \|T\|$.

$\Rightarrow \|T\| \overset{c)}{=} \|(T^*)^*\| \leqslant \|T^*\| \Rightarrow \|T\| = \|T^*\|$.

$\|T^*T\| \leqslant \|T\|\|T^*\| = \|T\|^2 \Rightarrow \|T^*T\|^{1/2} \leqslant \|T\|$.

$$\|Tx\|^2 = |(Tx, Tx)| = |(T^*Tx, x)| \leqslant \|T^*Tx\|\|x\| \leqslant \|T^*T\|\|x\|^2 \qquad \forall\, x \in H$$

$\Rightarrow \|Tx\| \leqslant \|T^*T\|^{1/2}\|x\|\ \forall\, x \Rightarrow \|T\| \leqslant \|T^*T\|^{1/2}$. ∎

1.2 Operatori autoaggiunti

1.6 Definizione. *Un operatore $T \in \mathscr{L}(H)$ si dice autoaggiunto se $T = T^*$, si dice normale se $T^*T = TT^*$, si dice unitario se T è invertibile e $T^{-1} = T^*$.*

1.7 Lemma. *Sia $T \in \mathscr{L}(H)$. Allora:*

a) $\ker T = \ker(T^*T)$, *b)* *T normale* $\Rightarrow \ker T = \ker T^*$.

Dimostrazione. a) $x \in \ker T \Rightarrow T^*Tx = T^*(Tx) = 0 \Rightarrow x \in \ker T^*T$,

$x \in \ker T^*T \Rightarrow (T^*Tx, x) = 0 \Rightarrow \|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = 0 \Rightarrow Tx = 0 \Rightarrow x \in \ker T$.

b) $\ker T \overset{a)}{=} \ker T^*T \overset{\text{hyp}}{=} \ker TT^* \overset{\text{Teorema 1.5,c)}}{=} \ker (T^*)^* T^* \overset{a)}{=} \ker T^*$. ■

1.8 Teorema. *Sia $T \in \mathscr{L}(H)$ autoaggiunto. Allora $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Tx, x)|$.*

Dimostrazione. Prima notiamo che, per ogni $T \in \mathscr{L}(H)$, vale

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(Tx, y)|. \tag{$*$}$$

Quindi $s(T) := \sup\limits_{\|x\|=1} |(Tx, x)| \leqslant \|T\|$.

Siano $x, y, z \in H$ arbitrari tali che $\|x\| = \|y\| = 1$. Valgono

$$\begin{aligned}(T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y) &= 2\big[(Tx, y) + (Ty, x)\big] \\ &= 2\big[(Tx, y) + \overline{(Tx, y)}\big] = 4\mathrm{Re}\,(Tx, y)\end{aligned}$$

e

$$|(Tz, z)| = \left|\left(T\frac{z}{\|z\|}, \frac{z}{\|z\|}\right)\right| \|z\|^2 \leqslant s(T)\|z\|^2.$$

Legge del parallelogramma $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}4\mathrm{Re}\,(Tx, y) &\leqslant |(T(x+y), x+y)| + |(T(x-y), x-y)| \\ &\leqslant s(T)\big(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\big) = 2s(T)\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) = 4s(T).\end{aligned}$$

$\exists\, \phi = \phi(x, y) \in \mathbb{R}: \quad |(Tx, y)| = e^{i\phi}(Tx, y) = (T(e^{i\phi}x), y)$

$\|e^{i\phi}x\| = \|x\| = 1 \Rightarrow |(Tx, y)| = \mathrm{Re}\,(T(e^{i\phi}x), y) \leqslant s(T)$

$(*) \Rightarrow \|T\| \leqslant s(T)$. ■

1.9 Corollario. *$T = T^* \in \mathscr{L}(H) \Rightarrow T$ è determinato dai valori (Tx, x), $x \in H$.*

Dimostrazione. Sia $S \in \mathscr{L}(H)$ autoaggiunto con $(Sx, x) = (Tx, x) \quad \forall\, x \in H$.

$\Rightarrow R := S - T$ autoaggiunto e $(Rx, x) = 0 \quad \forall\, x \in H$.

Teorema 1.8 $\Rightarrow R = 0$. ■

1.10 Teorema. *Sia $T \in \mathscr{L}(H)$. Allora:*

$$T \text{ autoaggiunto} \iff (Tx, x) \in \mathbb{R} \qquad \forall\, x \in H.$$

Dimostrazione. “$\Rightarrow$”: $(Tx, x) = (x, Tx) = \overline{(Tx, x)} \Rightarrow (Tx, x) \in \mathbb{R}$.

“$\Leftarrow$”: Siano $\alpha \in \mathbb{C}$ e $x, y \in H$.

$$\begin{aligned}(Tx,x)+\alpha(Ty,x) + \overline{\alpha}(Tx,y) + |\alpha|^2(Ty,y) &= (T(x+\alpha y), x+\alpha y)\\ &= \overline{(T(x+\alpha y), x+\alpha y)}\\ &= (Tx,x) + \alpha(y,Tx) + \overline{\alpha}(x,Ty) + |\alpha|^2(Ty,y)\end{aligned}$$

$\alpha = 1 \Rightarrow (1) \quad (Ty, x) + (Tx, y) = (y, Tx) + (x, Ty)$

$\alpha = i \Rightarrow (2) \quad i(Ty, x) - i(Tx, y) = i(y, Tx) - i(x, Ty)$

$(1) + i(2) \Rightarrow (Tx, y) = (x, Ty)$ ■

1.3 Sottospazi complementari e proiezioni ortogonali

Siano M, N due sottospazi di H. Il complementare ortogonale di M è

$$\boxed{M^\perp = \{x \in H \mid x \perp M\} = \{x \in H \mid (x, m) = 0 \quad \forall\, m \in M\}.}$$

Scriviamo

$$\boxed{H = M \oplus N :\iff H = M + N, \quad M \cap N = \{0\}, \quad M, N \text{ chiusi.}}$$

Si ricordi (prima parte): $M^\perp$ è chiuso, $M^\perp = \overline{M}^\perp$ e sottospazi di dimensione finita sono chiusi. Inoltre, $H = M \oplus M^\perp$ se M è chiuso, e vale il Teorema di Pitagora:

$$\boxed{x \perp y \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.}$$

1.11 Lemma. *Sia $H = M + N$ con due sottospazi M, N. Sia $(y, z) = 0$ per ogni $y \in M$, $z \in N$. Allora $N = M^\perp$ e $H = M \oplus M^\perp$ (i.e., M è chiuso).*

Dimostrazione. Ipotesi $\Rightarrow N \subseteq M^\perp$. Sia $x \in M^\perp$ e poniamo, come è possibile per le ipotesi, $x = y + z$ con $y \in M$, $z \in N$. Troviamo:

$x = y + z \in M^\perp \Rightarrow 0 = (y, x) = (y, y + z) = (y, y) + (y, z) = \|y\|^2 \Rightarrow x = z \in N$

$\Rightarrow M^\perp \subseteq N \Rightarrow N = M^\perp$ ed N è chiuso.

Scambiando i ruoli di M e N si ottiene $M = N^\perp$ ed M è chiuso. ■

1.12 Corollario. *Sia M sottospazio di H. Allora $M^{\perp\perp} := (M^\perp)^\perp = \overline{M}$.*

Dimostrazione. $H = \overline{M} \oplus \overline{M}^\perp = \overline{M} \oplus M^\perp \overset{1.11}{\Rightarrow} \overline{M} = (M^\perp)^\perp$. ∎

1.13 Lemma. $T \in \mathscr{L}(H) \Rightarrow (\operatorname{im} T)^\perp = \ker T^*$ *e* $(\ker T)^\perp = \overline{\operatorname{im} T^*}$.

Dimostrazione. Abbiamo

$$\begin{aligned} x \in \ker T^* &\iff T^*x = 0 \iff (T^*x, y) = 0 \quad \forall\, y \in H \\ &\iff (x, Ty) = 0 \quad \forall\, y \in H \\ &\iff x \perp Ty \quad \forall\, y \in H \iff x \in (\operatorname{im} T)^\perp. \end{aligned}$$

Inoltre: $\ker T = \ker T^{**} = (\operatorname{im} T^*)^\perp \Rightarrow (\ker T)^\perp = (\operatorname{im} T^*)^{\perp\perp} = ((\overline{\operatorname{im} T^*})^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{im} T^*}$. ∎

1.14 Definizione. *Sia M uno sottospazio chiuso. L'operatore $P_M : H \to H$ definito da*

$$P_M x = y, \qquad x = y + z \in M \oplus M^\perp,$$

si dice proiezione ortogonale su M.

1.15 Teorema. *Sia $P \in \mathscr{L}(H)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) *P è una proiezione ortogonale, cioè $\exists M \subseteq H$ sottospazio chiuso: $P = P_M$;*

(2) *$P = P^* = P^2$;*

(3) *$P^2 = P$ e $(Px, x) \geqslant 0$ per ogni $x \in H$.*

Dimostrazione. $(\mathbf{1}) \Rightarrow (\mathbf{2})$: Sia $x = y + z$ con $y \in M, z \in M^\perp$.
$\Rightarrow Px = y \Rightarrow P^2 x = Py = y = Px$.
Sia $x' = y' + z'$ con $y' \in M, z' \in M^\perp$.

$$\Rightarrow \begin{cases} (Px, x') = (y, y' + z') = (y, y') + (y, z') = (y, y'), \\ (x, Px') = (y + z, y') = (y, y') + (z, y') = (y, y'). \end{cases} \quad \Rightarrow P = P^*$$

$(\mathbf{2}) \Rightarrow (\mathbf{3})$: $(Px, x) = (P^2x, x) = (Px, P^*x) = (Px, Px) = \|Px\|^2 \geqslant 0$.

$(\mathbf{3}) \Rightarrow (\mathbf{1})$: Siano $M := \operatorname{im} P$ e $N := \ker P$.

i) $x \in H \Rightarrow P(x - Px) = Px - Px = 0 \Rightarrow x = Px + (x - Px) \in M + N \Rightarrow H = M + N$

ii) Siano $y \in M$ e $z \in N$. Supponiamo $\alpha := (y, z) \neq 0$. Sia $z' = -\frac{2}{\bar\alpha}\|y\|^2 z \Rightarrow$

$$0 \leqslant (P(y + z'), y + z') = (y, y) + (y, z') = \|y\|^2 - \frac{2}{\alpha}\|y\|^2 (y, z) = -\|y\|^2 \quad ↯$$

Lemma 1.11 $\Rightarrow$ (1), cioè, $H = M \oplus M^\perp = N \oplus N^\perp$ e $P = P_M$. ■

La dimostrazione mostra che per $P = P_M$ vale

$$\boxed{M = \operatorname{im} P, \qquad M^\perp = \ker P = \operatorname{im}(1-P), \qquad H = \operatorname{im} P \oplus \ker P.}$$

Inoltre,

$$\|P\| = \|P^2\| = \|PP^*\| = \|P\|^2$$

implica che $\|P\| = 1$ oppure $P = 0$ (cioè $M = \{0\}$).

1.4 Esercizi

Esercizio 1.1. *Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice invertibile. Per funzioni $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ definiamo*

$$(Tf)(x) = f(Ax), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dimostrare che $T \in \mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ e determinare l'aggiunto di T.

Esercizio 1.2. *Sia $T \in \mathscr{L}(H)$. Dimostrare:*

$$T \text{ normale} \iff \|Tx\| = \|T^*x\| \quad \forall\, x \in H.$$

Esercizio 1.3. *Sia $T \in \mathscr{L}(H)$. Dimostrare:*

$$T \text{ è suriettivo} \iff T^* \text{ è iniettivo e } \operatorname{im} T \text{ è chiuso.}$$

Esercizio 1.4. *Siano $P, Q \in \mathscr{L}(H)$ due proiezioni ortogonali. Dimostrare:*

$$PQ \text{ proiezione ortogonale} \iff PQ = QP.$$

In questo caso, PQ è la proiezione ortogonale su $\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q$.

Esercizio 1.5. *Siano $P, Q \in \mathscr{L}(H)$ due proiezioni ortogonali. Dimostrare:*

$$\operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} Q \iff \|Px\| \leqslant \|Qx\| \qquad \forall\, x \in H.$$

Esercizio 1.6. *Siano $P, Q \in \mathscr{L}(H)$ due proiezioni ortogonali. Dimostrare:*

$$P + Q \text{ proiezione ortogonale} \iff PQ = QP = 0.$$

In questo caso, $P + Q$ è la proiezione ortogonale su $\operatorname{im} P \oplus \operatorname{im} Q$.