2 Operatori compatti in spazi di Hilbert

Di cosa si tratta? Operatori di rango finito hanno una struttura particolarmente semplice. La proprietà di avere immagine di dimensione finita non è stabile sotto passaggio al limite. In uno spazio di Hilbert, la chiusura degli operatori di rango finito definisce lo spazio degli operatori compatti. Dimostriamo alcune proprietà fondamentali degli operatori compatti, in particolare che un operatore lineare è compatto se e solo se l'immagine di ogni sottoinsieme limitato del dominio è un insieme relativamente compatto del codominio.

2.1 Operatori di rango finito

2.1 Definizione. *$T \in \mathscr{L}(H)$ si dice di rango finito, se $\dim \operatorname{im} T < +\infty$. Scriviamo*

$$\mathscr{F}(H) = \{T \in \mathscr{L}(H) \mid \dim \operatorname{im} T < +\infty\}.$$

2.2 Lemma. *Sia $T \in \mathscr{F}(H)$ e $n := \dim \operatorname{im} T$. Allora esistono $x_1, \dots, x_n \in H$ e $y_1, \dots, y_n \in H$ tale che*

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} (x, y_i) x_i \qquad \forall\, x \in H.$$

In questo caso, $T^* \in \mathscr{F}(H)$ e $T^* y = \sum_{i=1}^{n} (y, x_i) y_i$ per ogni $y \in H$.

Dimostrazione. Sia $x_1, \dots, x_n$ una base ortonormale di $M := \operatorname{im} T$ e $x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \dots$ una base ortonormale di $M^\perp$. Quindi $\{x_i \mid i \geqslant 1\}$ è una base ortonormale di H.

$$\Rightarrow Tx = \sum_{i=1}^{+\infty} (Tx, x_i) x_i \overset{Tx \in M}{=} \sum_{i=1}^{n} (Tx, x_i) x_i = \sum_{i=1}^{n} (x, y_i) x_i \quad \forall\, x \in H \text{ con } y_i := T^* x_i.$$

$$(x, T^* y) = (Tx, y) = \sum_{k=1}^{n} (x, y_i)(x_i, y) = \Big(x, \sum_{i=1}^{n} \overline{(x_i, y)} y_i\Big) = \Big(x, \sum_{i=1}^{n} (y, x_i) y_i\Big). \qquad \blacksquare$$

2.2 Operatori compatti

2.3 Definizione. *$T \in \mathscr{L}(H)$ si dice compatto, se esiste una successione $(T_j) \subset \mathscr{F}(H)$ tale che $\|T_j - T\| \xrightarrow{j \to +\infty} 0$. Scriviamo*

$$\mathscr{K}(H) = \{T \in \mathscr{L}(H) \mid T \text{ compatto}\}.$$

Si noti che $\mathscr{K}(H)$ è un sottoinsieme chiuso di $\mathscr{L}(H)$ dato che è la chiusura di $\mathscr{F}(H)$ in $\mathscr{L}(H)$.

2.4 Esempio. *Siano* $T, T_j \in \mathscr{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ *dati da*

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = \Big(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots, \frac{1}{n}x_n, \dots\Big),$$
$$T_j(x_1, x_2, x_3, \dots) = \Big(x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{j}x_j, 0, 0, \dots\Big).$$

$\operatorname{im} T_j = \{x = (x_k) \in \ell^2 \mid x_k = 0 \text{ per ogni } n \geqslant j+1\}$ *ha dimensione* j *e*

$$\|(T - T_j)x\|^2 = \sum_{k=j+1}^{+\infty} \Big|\frac{1}{k}x_k\Big|^2 \leqslant \frac{1}{(j+1)^2} \sum_{k=j+1}^{+\infty} |x_k|^2 \leqslant \frac{1}{(j+1)^2}\|x\|^2.$$

$\Rightarrow \|T - T_j\| \leqslant 1/(j+1) \xrightarrow{j \to +\infty} 0 \Rightarrow T \in \mathscr{K}(\ell^2)$.

2.5 Esempio. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *e* T *un operatore integrale con nucleo* $k \in L^2(A \times A)$,

$$(Tf)(t) = \int_A k(t,s) f(s)\, ds.$$

Cauchy-Schwarz $\Rightarrow$

$$|(Tf)(t)| \leqslant \int_A |k(t,s)||f(s)|\, ds \leqslant \Big(\int_A |k(t,s)|^2\, ds\Big)^{1/2} \|f\|_{L^2(A)},$$
$$\|Tf\|^2_{L^2(A)} \leqslant \int_A \int_A |k(t,s)|^2\, ds \|f\|^2_{L^2(A)}\, dt = \|k\|^2_{L^2(A\times A)} \|f\|^2_{L^2(A)}.$$

$\Rightarrow T \in \mathscr{L}(L^2(A))$ *con* $\|T\| \leqslant \|k\|_{L^2(A\times A)}$.
Sia $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ *una base ortonormale di* $L^2(A)$ *e*

$$f_{ij}(t,s) := e_i(t)\overline{e_j(s)}, \qquad i, j \geqslant 1.$$

$\Rightarrow \{f_{ij} \mid i, j \geqslant 1\}$ *base ortonormale di* $L^2(A \times A)$ *(cfr. Esercizio 2.4).*

$$\Rightarrow k(t,s) = \sum_{i,j=1}^{+\infty} a_{ij} e_i(t)\overline{e_j(s)}, \quad a_{ij} = (k, f_{ij})_{L^2(A\times A)} \qquad (\textit{convergenza in } L^2(A \times A))$$

Definiamo T_ℓ *tramite il nucleo* $k_\ell(t,s) = \sum_{i,j=1}^{\ell} a_{ij} e_i(t)\overline{e_j(s)}$.

$$T_\ell f = \sum_{i,j=1}^{\ell} a_{ij} e_i (f, e_j) \Rightarrow \operatorname{im} T_\ell \subseteq \langle e_1, \dots, e_\ell\rangle \Rightarrow T_\ell \in \mathscr{F}(H).$$

$$\|T - T_\ell\|^2 \leqslant \|k - k_\ell\|^2_{L^2(A\times A)} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>\ell \text{ o } j>\ell}}^{+\infty} |a_{ij}|^2 \xrightarrow{\ell \to +\infty} 0.$$

$\Rightarrow T \in \mathscr{K}(L^2(A))$.

2.6 Teorema. *Sia* $\mathscr{V} = \mathscr{F}(H)$ *oppure* $\mathscr{V} = \mathscr{K}(H)$. *Allora:*

a) $\mathscr{V}$ *è un sottospazio di* $\mathscr{L}(H)$;

b) $T \in \mathscr{V}$ *allora* $T^* \in \mathscr{V}$;

c) $T \in \mathscr{V}$ *e* $S \in \mathscr{L}(H)$, *allora* $ST, TS \in \mathscr{V}$.

Dimostrazione. Consideriamo prima $\mathscr{V} = \mathscr{F}(H)$.

a) $S, T \in \mathscr{F}(H)$, $\alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \operatorname{im}(S+T) \subseteq \operatorname{im} S + \operatorname{im} T$ e $\operatorname{im}(\alpha T) \subseteq \operatorname{im} T$ hanno dimensione finita.

b) È il Lemma 2.2.

c) $\operatorname{im} TS = TS(H) = T(S(H)) \subseteq T(H) = \operatorname{im} T \Rightarrow \dim \operatorname{im} TS \leqslant \dim \operatorname{im} T < +\infty$.

$\operatorname{im} ST = ST(H) = S(T(H)) = S(\operatorname{im} T) \Rightarrow \dim \operatorname{im} ST \leqslant \dim \operatorname{im} T < +\infty$.

Le affermazioni per $\mathscr{V} = \mathscr{K}(H)$ seguono tramite approssimazione e continuità. Per esempio, siano $T_j \in \mathscr{F}(H)$ e $T_j \to T$. Allora

$$\|T_j^* - T^*\| = \|(T_j - T)^*\| = \|T_j - T\| \xrightarrow{j \to +\infty} 0,$$
$$\|ST_j - ST\| = \|S(T_j - T)\| \leqslant \|S\| \|T_j - T\| \xrightarrow{j \to +\infty} 0.$$

Siccome $T_j^*, ST_j \in \mathscr{F}(H)$, abbiamo provato che $T^*, ST \in \mathscr{K}(H)$. ∎

2.3 Caratterizzazioni della compattezza

Ricordiamo che, in uno spazio metrico completo, per un sottoinsieme Ω le seguenti affermazioni sono equivalenti:

a) Ω è relativamente compatto (cioè $\overline{\Omega}$ è compatto);

b) Ω è totalmente limitato, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero finito di elementi $x_1, \ldots, x_N \in \Omega$ tale che $\Omega \subseteq B_\varepsilon(x_1) \cup \ldots \cup B_\varepsilon(x_N)$ (una cosiddetta ε-rete), dove $B_\delta(p) = \{x \in X \mid d(x,p) < \delta\}$;

c) Ogni successione in Ω contiene una sottosuccessione convergente.

Un insieme compatto è sempre limitato e chiuso. In uno spazio vettoriale di dimensione finita (quindi isomorfo a $\mathbb{C}^n$ per qualche n) vale anche l'opposto: cioè, un insieme limitato e chiuso è compatto.

2.7 Teorema. *Siano* $T \in \mathscr{L}(H)$ *e* $B = \{x \in H \mid \|x\| \leqslant 1\}$. *Allora si ha:*

$$T \in \mathscr{K}(H) \iff T(B) \text{ relativamente compatto.}$$

Dimostrazione. "$\Rightarrow$": Sia dato un $\varepsilon > 0$.

$T \in \mathscr{K}(H) \Rightarrow \exists\, S \in \mathscr{F}(H) : \quad \|T - S\| < \varepsilon/2.$

$$\left.\begin{array}{l} Y := \operatorname{im} S \text{ sottospazio chiuso di dimensione finita} \\ \overline{S(B)} \subset Y \text{ limitato e chiuso} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{S(B)} \text{ è compatta in } Y.$$

$\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, y_1, \ldots, y_n \in S(B) : \quad S(B) \subset B^Y_{\varepsilon/2}(y_1) \cup \ldots \cup B^Y_{\varepsilon/2}(y_n),$
dove $B^Y_\delta(y_i) = \{y \in Y \mid \|y - y_i\| < \delta\}$.

Sia $x \in B$ arbitrario.

$\Rightarrow \exists\, i \in \{1, \ldots, n\} : \quad Sx \in B^Y_{\varepsilon/2}(y_i).$

$\Rightarrow \|Tx - y_i\| \leqslant \|Tx - Sx\| + \|Sx - y\| < \frac{\varepsilon}{2}\|x\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$

$\Rightarrow Tx \in B_\varepsilon(y_i)$ (qui $B_\varepsilon(y_i) = \{z \in H \mid \|z - y_i\| < \varepsilon\}$).

$\Rightarrow T(B) \subset B_\varepsilon(y_1) \cup \ldots \cup B_\varepsilon(y_n)$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon$-rete per $T(B)$.

$\Rightarrow T(B)$ relativamente compatto.

"$\Leftarrow$": Sia dato un $\varepsilon > 0$.

$T(B)$ relativamente compatto $\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, y_1, \ldots, y_n \in H : \quad T(B) \subset B_\varepsilon(y_1) \cup \ldots \cup B_\varepsilon(y_n).$

$M := \langle y_1, \ldots, y_n \rangle \Rightarrow T_\varepsilon := P_M T \in \mathscr{F}(H).$

Sia $x \in B$ arbitrario.

$\exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \quad \|Tx - y_k\| < \varepsilon$. Quindi

$$\begin{aligned} \|(T_\varepsilon - T)x\| &\leqslant \|T_\varepsilon x - y_k\| + \|y_k - Tx\| = \|P_M Tx - P_M y_k\| + \|y_k - Tx\| \\ &\leqslant \|P_M\|\|Tx - y_k\| + \|y_k - Tx\| \leqslant 2\varepsilon. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|T_\varepsilon - T\| = \sup_{x \in B} \|(T_\varepsilon - T)x\| \leqslant 2\varepsilon.$

$\varepsilon = 1/j \Rightarrow \|T - T_{1/j}\| \leqslant 2/j \xrightarrow{j \to +\infty} 0.$

$T_{1/j} \in \mathscr{F}(H) \quad \forall\, j \Rightarrow T \in \mathscr{K}(H).$ ∎

Negli spazi di Banach, si *definiscono* gli operatori compatti tramite il Teorema 2.7.

Definizione. Siano X, Y spazi di Banach e $B = \{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1\}$. L'operatore $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ si dice compatto se $T(B)$ è relativamente compatto in Y.

Un operatore che è limite di operatori di rango finito risulta essere compatto (con la stessa dimostrazione), ma il risultato opposto vale solo in spazi di Hilbert! Si può dimostrare che $\mathscr{K}(X, Y)$ è uno sottospazio chiuso di $\mathscr{L}(X, Y)$.

2.8 Teorema. *Per $T \in \mathscr{L}(H)$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a) $T \in \mathscr{K}(H)$.

b) *Se (x_k) è una qualsiasi successione limitata, allora (Tx_k) contiene una sottosucces-*

sione convergente.

c) *Se $(x_k) \subset H$ è una qualsiasi successione debolmente convergente, allora (Tx_k) converge in H.*

DIMOSTRAZIONE. **a)** $\Rightarrow$ **b)** : Sia $\|x_k\| \leqslant C \quad \forall\, k$.

$y_k := x_k/C \Rightarrow (y_k) \subseteq B = \{y \in H \mid \|y\| \leqslant 1\}$.

Teorema 2.7 $\Rightarrow$ (Ty_k) contiene una sottosuccessione convergente.

Sia $Ty_{k_j} \xrightarrow{j\to+\infty} y$. Ne segue

$Tx_{k_j} \xrightarrow{j\to+\infty} Cy \Rightarrow (Tx_k)$ contiene una sottosuccessione convergente.

b) $\Rightarrow$ **a)** : Ogni successione in $T(B)$ è della forma (Tx_k) con $\|x_k\| \leqslant 1$.

Ipotesi $\Rightarrow$ Ogni successione in $T(B)$ contiene una sottosuccessione convergente

$\Rightarrow T(B)$ è relativamente compatto.

Teorema 2.7 $\Rightarrow$ T compatto.

a) $\Rightarrow$ **c)** : Sia $x_n \rightharpoonup x$. In particolare, (x_n) è limitata.

$x' \in H' \Rightarrow x' \circ T \in H' \Rightarrow x'(Tx_n) = (x' \circ T)(x_n) \to (x' \circ T)(x) = x'(Tx)$

$\Rightarrow Tx_n \rightharpoonup Tx$.

Dimostriamo $Tx_n \to Tx$. Per assurdo, supponiamo che sia vero il contrario. Si ha quindi

$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, (x_{n_\ell}) : \quad \|Tx_{n_\ell} - Tx\| \geqslant \varepsilon \qquad (*)$.

$$\left.\begin{array}{r}(x_{n_\ell}) \text{ limitata} \\ T \text{ compatto}\end{array}\right\} \overset{2.8}{\Rightarrow} \exists\, (x_{n_{\ell_j}}), y : \quad Tx_{n_{\ell_j}} \to y$$

$Tx_n \rightharpoonup Tx \Rightarrow Tx_{n_{\ell_j}} \rightharpoonup Tx \Rightarrow y = Tx \Rightarrow Tx_{n_{\ell_j}} \to Tx$ ↯ (contraddice $(*)$).

c) $\Rightarrow$ **a)** : Sia (x_k) limitata.

Teorema di Eberlein-Smulian (H è riflessivo!) $\Rightarrow \exists\, (x_{k_\ell})$ debolmente convergente.

Ipotesi $\Rightarrow (Tx_{k_\ell})$ convergente $\Rightarrow (Tx_k)$ contiene una sottosuccessione convergente.

Allora c) implica b) e quindi a). ∎

2.9 Corollario. *Sia $I : H \to H$ l'operatore identità (cioè $Ix = x$ per ogni $x \in H$). Allora:*

$$I \in \mathscr{K}(H) \iff \dim H < +\infty.$$

DIMOSTRAZIONE. "$\Leftarrow$": $\dim \operatorname{im} I = \dim H < +\infty \Rightarrow I \in \mathscr{F}(H) \subseteq \mathscr{K}(H)$.

"$\Rightarrow$": Supponiamo $\dim H = +\infty$ con base ortonormale $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$.

$(e_k) \subseteq B = \{x \mid \|x\| = 1\}$.

$k \neq \ell \Rightarrow \|e_k - e_\ell\|^2 = \|e_k\|^2 + \|e_\ell\|^2 = 2$

$\Rightarrow (Ie_k) = (e_k)$ non contiene nessuna sottosuccessione convergente.

Teorema 2.8 $\Rightarrow I$ non è compatta. $\lightning$ ■

Di consequenza, in uno spazio H di dimensione infinita, un operatore compatto non è mai invertibile (perché altrimenti $I = TT^{-1}$ sarebbe compatto).

2.4 Esercizi

Esercizio 2.1. *Sia $T \in \mathscr{L}(H)$. Dimostrare: $T \in \mathscr{K}(H) \iff T^*T \in \mathscr{K}(H)$.*

Esercizio 2.2. *Sia $T \in \mathscr{L}(H)$ e V uno sottospazio chiuso di H con $T(V) \subseteq V$. Mostrare:*

a) T autoaggiunto $\Rightarrow T(V^\perp) \subset V^\perp$.

b) T compatto $\Rightarrow T|_V : V \to V$ compatto.

Esercizio 2.3. *Sia $(a_n) \subset \mathbb{C}$ una successione convergente ad a e sia $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ definito da*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, a_4x_4, \ldots).$$

Dimostrare che $aI - T$ è un operatore compatto.

Esercizio 2.4. *Sia $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ una base ortonormale di $L^2(A)$. Dimostrare che le funzioni*

$$f_{jk}(s,t) := e_j(s)e_k(t), \qquad j,k \geqslant 1,$$

definiscono una base ortonormale $\{f_{jk} \mid j,k \geqslant 1\}$ di $L^2(A \times A)$.

Suggerimento. *Si utilizzi il seguente teorema: Un sistema ortonormale $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ in uno spazio di Hilbert è una base ortonormale se, e solo se,*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |(x, x_k)|^2 \qquad \forall\, x \in H.$$

Osservazione. *Siccome*

$$\{e_1, e_2, e_3, \ldots\} \text{ è una base ortonormale di } L^2(A)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \ldots\} \text{ è una base ortonormale di } L^2(A),$$

in modo simile si dimostra che, posto $\widetilde{f}_{jk}(s,t) = e_j(s)\overline{e_k(t)}$, $j,k \geqslant 1$, $\{\widetilde{f}_{jk} \mid j,k \geqslant 1\}$ è una base ortonormale di $L^2(A \times A)$.